

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

- Вып. 1. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности.
Вып. 2. И. П. Натансон. Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. И. С. Соминский. Метод математической индукции.
Вып. 4. А. И. Маркушевич. Замечательные кривые.
Вып. 5. П. П. Коровкин. Неравенства.
Вып. 6. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи.
Вып. 7. А. Г. Курош. Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. А. И. Маркушевич. Площади и логарифмы.
Вып. 10. А. С. Смогоржевский. Метод координат.
Вып. 11. Я. С. Дубнов. Ошибка в геометрических доказательствах.
Вып. 12. И. П. Натансон. Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. А. И. Фетисов. О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. И. Р. Шафаревич. О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. В. Г. Шерватов. Гиперболические функции.
Вып. 17. В. Г. Болтянский. Что такое дифференцирование?
Вып. 18. Г. М. Миракьян. Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. Л. А. Люстерник. Кратчайшие линии.
Вып. 20. А. М. Лопшиц. Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. Л. И. Головина, И. М. Яглом. Индукция в геометрии.
Вып. 22. В. Г. Болтянский. Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. А. С. Смогоржевский. О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. Б. И. Аргунов, Л. А. Скорняков. Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. А. С. Смогоржевский. Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. В. А. Трахтенброт. Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. В. А. Успенский. Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. Н. А. Архангельский, Б. И. Зайцев. Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. А. Н. Костовский. Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. Г. Е. Шилов. Как строить графики.
Вып. 31. А. Г. Дорфман. Оптика конических сечений.
Вып. 32. Е. С. Вентцель. Элементы теории игр.
Вып. 33. А. С. Барсов. Что такое линейное программирование.
Вып. 34. Б. Е. Маргулис. Системы линейных уравнений.
Вып. 35. Н. Я. Виленкин. Метод последовательных приближений.
Вып. 36. В. Г. Болтянский. Огибающая.
Вып. 37. Г. Е. Шилов. Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. Ю. А. Шрейдер. Что такое расстояние.
Вып. 39. Н. Н. Воробьев. Признаки делимости.
Вып. 40. С. В. Фомин. Системы счисления.
Вып. 41. Б. Ю. Коган. Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. Ю. И. Любич, Л. А. Шор. Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. В. А. Успенский. Треугольник Паскаля.
Вып. 44. И. Я. Бакельман. Инверсия.
Вып. 45. И. М. Яглом. Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. И. М. Соболев. Метод Монте-Карло.
Вып. 47. Л. А. Калужнин. Основная теорема арифметики.
Вып. 48. А. С. Солодовников. Системы линейных неравенств.
Вып. 49. Г. Е. Шилов. Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. Н. М. Бескин. Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. Н. М. Бескин. Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. Б. А. Розенфельд, Н. Д. Сергеева. Стереографическая проекция.
Вып. 54. В. А. Успенский. Машина Поста.
Вып. 55. Л. Беран. Упорядоченные множества.
Вып. 56. С. А. Абрамов. Элементы программирования.
Вып. 57. В. А. Успенский. Теорема Гёделя о неполноте.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию	3
Предисловие к первому изданию	3
Введение	5
§ 1. Общее представление о методе	5
Глава 1. Моделирование случайных величин	9
§ 2. Случайные величины	9
§ 3. Получение случайных величин на ЭВМ	20
§ 4. Преобразования случайных величин	25
Глава 2. Примеры применения метода Монте-Карло	32
§ 5. Расчет системы массового обслуживания	32
§ 6. Расчет качества и надежности изделий	37
§ 7. Расчет прохождения нейтронов сквозь пластинку	42
§ 8. Астрофизическая задача	49
§ 9. Вычисление определенного интеграла	51
Глава 3. Дополнительные сведения	57
§ 10. О псевдослучайных числах	57
§ 11. О методах моделирования случайных величин	59
§ 12. Об алгоритмах Монте-Карло	70
Таблицы	76
Литература	77

Илья Меерович Соболев

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Редактор *И. В. Викторенкова*

Техн. редактор *Е. В. Морозова*

Корректоры *О. А. Сигал, М. Л. Медведская*

ИБ № 12717

Сдано в набор 21.06.84. Подписано к печати 30.01.85. Т-01259. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр.-отт. 4,41. Уч.-изд. л. 3,94. Тираж 50000 экз. Заказ № 216. Цена 10 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

ТАБЛИЦЫ

Таблица А. 400 случайных цифр *)

86515	90795	66434	56558	12332	94377	57802
41686	03393	99224	88955	53758	91641	18867
61686	42163	38967	33181	72664	53807	00607
86522	47171	89342	67248	09082	12311	90316
72587	93000	78416	27589	99528	14480	50961
52452	42499	83935	79130	90410	45420	77757
76773	97526	66447	25731	37525	16287	66181
04825	82134	75120	45904	75601	70492	10274
87113	84778	24520	19976	04925	07824	76044
84754	57616	64294	15218	49286	89571	42903

Таблица Б. 88 нормальных величин **)

0,2005	1,1922	0,0348	1,0423	-1,8149	1,1803	0,0033
1,1609	-0,6690	0,5816	1,8818	0,7390	-0,2736	1,0828
0,5864	-0,9245	1,5068	-1,1147	0,2776	0,1012	-1,3566
0,1425	-0,2863	0,4043	0,6379	-0,4428	-2,3006	-0,6446
0,9516	-1,7708	0,4686	1,4664	1,6852	-0,9690	-0,0831
-0,5863	0,8574	0,8115	-0,2676	1,2496	-1,2125	1,3846
1,1572	0,9990	0,5405	-0,6022	0,0093	0,2119	-1,4647
-0,4428	-0,5564	-1,1929	-0,0572	-0,5061	-0,1557	-1,2384
-0,3924	1,7981	-1,3596	1,4943	-0,4406	-0,2033	-0,1316
0,8319	0,4270	0,4167	-0,8513	1,1054	1,2237	-0,7003
0,9780	-0,7679	0,8960	-0,7165	0,8563	-1,1630	1,8800

*) Случайные цифры имитируют значения случайной величины с распределением (22).

**) Нормальные величины имитируют значения нормальной (гауссовской) случайной величины ξ с параметрами $a=0$, $\sigma=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бусленко Н. П. и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)/Под ред. Ю. А. Шрейдера.— М.: Физматгиз, 1962.
2. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы.— М.: Наука, 1975.
3. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло.— М.: Наука, 1973.
4. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования.— М.: Наука, 1976.

ном единичном кубе $\{0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1\}$, ибо ее плотность в этом кубе равна

$$p_{\Gamma}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{\gamma_1}(x_1) p_{\gamma_2}(x_2) \dots p_{\gamma_n}(x_n) = 1.$$

Вместо (57) можно записать, что $\xi = g(\Gamma)$.

Далее, вычисляемая величина m равна

$$m = Mg(\Gamma) = \int_0^1 \dots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

[(использован многомерный аналог формулы (18)). Следовательно, вместо (56) можем записать, что

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 g dx_1 \dots dx_n \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\Gamma_j). \quad (62)$$

Формула (62) показывает, что наш алгоритм есть не что иное, как приближенное вычисление интеграла по n -мерному единичному кубу путем осреднения значений подынтегральной функции в независимых случайных точках $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$.

12.4. Об использовании неслучайных точек в алгоритмах Монте-Карло. Математике известны последовательности n -мерных неслучайных точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_j, \dots$, для которых справедлив аналог соотношения (62): какова бы ни была интегрируемая ограниченная функция $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, имеет место равенство

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 g dx_1 \dots dx_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(Q_j). \quad (63)$$

Такие последовательности точек называют *равномерно распределенными* в единичном n -мерном кубе в теоретико-числовом смысле.

Конечно, не любая равномерно распределенная последовательность точек пригодна для практических расчетов. Желательно, чтобы скорость сходимости в формуле (63) была оптимальной; чтобы равномерность расположения точек Q_1, Q_2, \dots, Q_N в кубе имела место не только при $N \rightarrow \infty$, а начиная с небольших N ; чтобы точки Q_j достаточно просто вычислялись. Всем этим требованиям удовлетворяют ЛП $_{\tau}$ -последовательности*).

*) Важнейшие свойства, формулы и программы для расчета точек ЛП $_{\tau}$ -последовательностей имеются в книге: Соболев И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. — М.: Наука, 1981.

Сравнение формул (62) и (63) показывает, что при расчете j -го значения $\xi_j = g(\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \dots, \gamma_{nj})$ можно вместо случайных чисел $\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \dots, \gamma_{nj}$ использовать декартовы координаты $q_{1j}, q_{2j}, \dots, q_{nj}$ точки Q_j : сходимость средних гарантируется формулой (63). Особенно важно, что для некоторых функций $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ погрешность приближения (63) убывает как $1/N$, в то время как для приближения (62) она всегда порядка $1/\sqrt{N}$. Таким образом, не меняя алгоритма (56), (57), а лишь используя вместо случайных чисел координаты точек Q_j , можно в некоторых задачах существенно увеличить точность расчетов.

Численный пример. Математическое ожидание случайной величины

$$\xi = (1 + 2\gamma_1)(2 + 2\gamma_2) \dots (9 + 2\gamma_9)/10!$$

равное $M\xi = 1$, вычислялось с помощью оценки (56). При использовании обычных псевдослучайных чисел вероятные ошибки такого приближения равны $r_N = 0,30/\sqrt{N}$. Когда же в расчете были использованы точки 9-мерной ЛП $_{\tau}$ -последовательности, то фактические погрешности при $N = 2^5, 2^6, \dots, 2^{20}$ оказались равными $2,0/N$.

Точки эти иногда называют *квасислучайными*. Если проверить их распределение в n -мерном кубе с помощью соответствующего статистического теста (ср. п. 3.1), то они окажутся «слишком равномерно» расположенными. Но, конечно, они не обладают целым рядом других свойств, присущих настоящим случайным точкам.

будем считать заданными. Дисперсия $D\theta$ конечна. Очевидно, в качестве оценки для m можно использовать среднее арифметическое:

$$m \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \theta_j, \quad (59)$$

где $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ — независимые значения θ .

Обозначим через t_ξ и t_η времена расчета соответственно одного значения ξ и η , и пусть t_f — время, затрачиваемое на вычисление значения $f(\xi, \eta)$. Тогда трудоемкость алгоритма (59) равна $tD\theta$, где $t = t_\xi + t_\eta + t_f$.

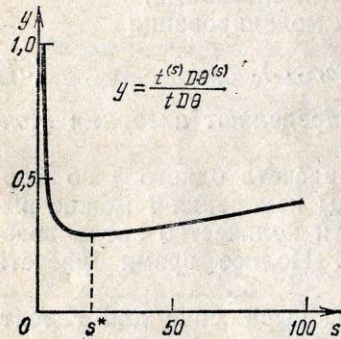


Рис. 36.

Предположим теперь, что рассматривается задача, в которой расчет ξ значительно сложнее, чем расчет η и f , так что $t_\xi \gg t_\eta + t_f$. В этом случае может оказаться выгодным вместо θ использовать осредненную случайную величину

$$\theta^{(s)} = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s f(\xi_k, \eta_k), \quad (60)$$

которая зависит от одного ξ и s независимых значений η .

Дисперсию $\theta^{(s)}$ нетрудно вычислить:

$$D\theta^{(s)} = D\theta(1 - r + rs)/s,$$

где $0 \leq r \leq 1$ — постоянная*). Время расчета одного $\theta^{(s)}$ равно $t^{(s)} = t_\xi + s(t_\eta + t_f)$ (продолжительностью операций сложения мы пренебрегаем). Таким образом, трудоемкость алгоритма

$$m \approx \frac{1}{Ns} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^s f(\xi_j, \eta_{jk}) \quad (61)$$

*) Здесь r — коэффициент корреляции случайных величин $f(\xi, \eta')$, $f(\xi, \eta'')$, а η' , η'' — независимые значения η . Использована известная формула для дисперсии суммы случайных величин:

$$D \sum_{k=1}^s f_k = \sum_{k=1}^s Df_k + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq s} r(f_k, f_l) \sqrt{Df_k Df_l}.$$

равна

$$t^{(s)} D\theta^{(s)} = D\theta(1 - r + sr)(t_\eta + t_f + t_\xi/s).$$

Последнее выражение при $0 < s < \infty$ имеет единственный минимум в точке $s = s_*$, где

$$s_* = \sqrt{(1/r - 1)t_\xi/(t_\eta + t_f)}.$$

Численный пример. Пусть $t_\xi \approx 100(t_\eta + t_f)$ и $r \approx 0,2$. Тогда $s_* \approx 20$. Трудоемкость алгоритма (61) при оптимальном $s = s_*$ в 3,5 раза меньше трудоемкости алгоритма (59) (рис. 36).

Замена случайной величины θ величиной $\theta^{(s)}$ — частный случай приема, известного под названием *расщепление траекторий*. В нашем примере траектория состоит из одного звена: перехода от ξ к η .

12.3. Конструктивная размерность алгоритма Монте-Карло. Рассмотрим произвольный алгоритм вида (56), (57) для расчета некоторой величины $m = M\xi$. Если функция (57) зависит всего от n переменных: $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, то говорят, что *конструктивная размерность* алгоритма (56), (57) равна n . Сокращенно будем писать к.р. = n .

Иными словами, к.р. равна количеству случайных чисел, затрачиваемых на реализацию одного значения ξ . Даже лучше сказать «максимальному количеству», ибо это количество не обязано быть постоянным во всех опытах. Например, в задаче о прохождении нейтронов сквозь пластинку (п. 7.2) траектории могут состоять из разного числа звеньев; при этом на расчет η будет затрачиваться разное количество случайных чисел. Вообще говоря, число звеньев может оказаться как угодно большим, так что для этого алгоритма к.р. = ∞ . Однако если число моделируемых рассеяний нейтрона заранее ограничено, то к.р. будет конечной.

Если для моделирования какой-нибудь промежуточной случайной величины ξ' (в алгоритме (56), (57)) используется формула вида $\xi' = g'(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$, то к.р. растет с ростом s . Таким образом, с точки зрения уменьшения к.р. выгоднее всего метод обратных функций, для которого $s = 1$. Напротив, если для моделирования ξ' используется метод отбора, то к.р. = ∞ .

Все алгоритмы Монте-Карло с к.р. = n допускают единую интерпретацию. В самом деле, рассмотрим случайную n -мерную точку Γ с декартовыми координатами $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Она равномерно распределена в n -мер-

$p_1(x)dx$. Так как η'' равномерно распределена в интервале $0 < y < C$, то условная вероятность того, что эта точка не будет отброшена, равна $f(x)/C$ и, стало быть, пропорциональна $f(x)$. Следовательно, вероятность того, что отобранное значение $\xi = \eta'$ окажется в интервале $(x, x + dx)$, пропорциональна произведению $p_1(x)dx \times f(x) = p(x)dx$.

Вероятность отбора можно вычислить путем суммирования условных вероятностей отбора $f(x)/C$:

$$\varepsilon = \int_a^b \frac{f(x)}{C} p_1(x) dx = \frac{1}{C} \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{C}.$$

Метод Неймана (п. 4.3) представляет собой частный случай обобщенного метода, соответствующий выбору $p_1(x) = 1/(b-a)$ и $f(x) = (b-a)p(x)$. Так как $p(x) \leq M_0$, то $f(x) \leq (b-a)M_0$. Следовательно, эффективность метода Неймана равна $\varepsilon = 1/(b-a)M_0$.

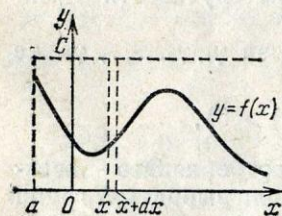


Рис. 35.

Этот же результат легко получить непосредственно из рис. 14, если сообразить, что точка Γ равномерно распределена в прямоугольнике $a < x < b$, $0 < y < M_0$. Ибо тогда эффективность отбора равна отношению площади, заключенной под кривой $y = p(x)$, к площади всего прямоугольника:

$$\varepsilon = \frac{1}{(b-a)M_0} \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{(b-a)M_0}.$$

Пример. Рассмотрим плотность $p(x) = v(x)x^{-1/3}$ при $0 < x < 1$, где функция $v(x)$ ограничена: $v(x) \leq A$. В качестве вспомогательной выберем плотность $p_1(x) = (2/3)x^{-1/3}$, которая легко моделируется методом обратных функций: $\eta' = \gamma^{3/2}$. Тогда $f(x) = p(x)/p_1(x) = (3/2)v(x) \leq (3/2)A$. Условие отбора $\eta'' < f(\eta')$ можно несколько упростить, сократив на $3/2$. Получим следующий метод отбора для моделирования ξ с плотностью $p(x)$:

- 1) выбираем γ_1, γ_2 и вычисляем $\eta' = (\gamma_1)^{3/2}$;
- 2) если $A\gamma_2 < v(\eta')$, то полагаем $\xi = \eta'$; в противном случае выбираем новые γ_1, γ_2 .

§ 12. Об алгоритмах Монте-Карло

12.1. Трудоемкость алгоритма Монте-Карло. Предположим, что для расчета некоторой величины m мы придумали случайную величину ξ такую, что $M\xi = m$ и

дисперсия $D\xi$ конечна. Тогда, выбрав N независимых значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ этой величины, можем записать оценку

$$m \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j. \quad (56)$$

Эту оценку обычно называют *методом Монте-Карло* для расчета m . Мы видели в п. 2.5, что точность этой оценки зависит от дисперсии $D\xi$. Однако формула (56) не определяет алгоритма расчета, ибо случайную величину ξ можно моделировать различными способами.

Выберем конкретный метод моделирования

$$\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots). \quad (57)$$

Формулы (56), (57) вместе определяют *алгоритм Монте-Карло* для расчета m .

Обозначим через t время расчета одного ξ по формуле (57). В качестве единицы измерения t можно выбрать как микросекунды, так и количество затрачиваемых элементарных операций. Полное время расчета оценки (56) равно $T = Nt$.

Преобразуем приближенное выражение для вероятной ошибки формулы (56)

$$r_N = 0,6745 \sqrt{D\xi/N}.$$

Если ввести сюда вместо N величину T/t , то получим выражение

$$r_N = 0,6745 \sqrt{tD\xi/T}. \quad (58)$$

Последняя формула показывает, что если полное время расчета T фиксировано, то вероятная ошибка зависит от произведения $tD\xi$. Это произведение называют *трудоемкостью* алгоритма Монте-Карло (56), (57). Чем меньше трудоемкость, тем выгоднее алгоритм, так как полученному за то же время T результату соответствует меньшая вероятная ошибка (58).

Обычно и значение $D\xi$ и значение t оценивают эмпирически по сравнительно небольшому количеству испытаний. Однако иногда удается это сделать и теоретически.

12.2. Пример с расщеплением. Рассмотрим задачу о вычислении среднего значения $m = M\theta$ случайной величины $\theta = f(\xi, \eta)$. Формулы для моделирования ξ и η

Величину $\gamma_{(s)}$ называют *s-й порядковой статистикой равномерного распределения*. Ясно, что $\gamma_{(s)}$ зависит от всех $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Плотность распределения $\gamma_{(s)}$ известна*): при $0 < x < 1$ она равна

$$p(x) = n C_{n-1}^{s-1} x^{s-1} (1-x)^{n-s}. \quad (54)$$

Значит, различные случайные величины с плотностями такого вида можно моделировать при помощи порядковых статистик.

Пусть заданы натуральные числа s, t . Положим $n = s + t - 1$. Тогда плотность (54) превратится в так называемое *бета-распределение*:

$$p(x) = x^{s-1} (1-x)^{t-1} / B(s, t), \quad 0 < x < 1, \quad (55)$$

где $B(s, t)$ — бета-функция:

$$\begin{aligned} B(s, t) &= \Gamma(s)\Gamma(t) / \Gamma(s+t) = \\ &= (s-1)!(t-1)! / (s+t-1)!. \end{aligned}$$

Итак, для того чтобы моделировать случайную величину ξ , подчиняющуюся бета-распределению, надо выбрать случайные числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s+t-1}$ и найти среди них $\gamma_{(s)}$. Заметим, что старшая порядковая статистика $\gamma_{(n)}$ — это рассмотренная выше случайная величина $\max(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$.

Способы моделирования гамма- и бета-распределений с дробными параметрами имеются в [4].

*) Схема доказательства. Выберем произвольный интервал $(x, x + \Delta x)$. С каждым значением γ свяжем три случайных события

$$A_1 = \{\gamma < x\}, \quad A_2 = \{x \leq \gamma < x + \Delta x\}, \quad A_3 = \{x + \Delta x \leq \gamma\}.$$

Вероятности этих событий $p_1 = x, p_2 = \Delta x, p_3 = 1 - x - \Delta x$.

Рассмотрим n независимых значений $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. При этом событие A_i наступит v_i раз, $v_1 + v_2 + v_3 = n$. Если $m_1 + m_2 + m_3 = n$ и все $0 \leq m_i \leq n$, то, согласно полиномиальному закону,

$$P\{v_1 = m_1, v_2 = m_2, v_3 = m_3\} = \frac{n!}{m_1! m_2! m_3!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}.$$

Нетрудно понять, что

$$P\{x \leq \gamma_{(s)} < x + \Delta x\} = P\{v_1 = s-1, v_2 = 1, v_3 = n-s\} + O((\Delta x)^2).$$

Поделив на Δx и устремив Δx к нулю, получим искомую плотность

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq \gamma_{(s)} < x + \Delta x\}}{\Delta x} = n C_{n-1}^{s-1} x^{s-1} (1-x)^{n-s}.$$

11.4. Преобразования вида $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots)$.

В этот класс входят такие преобразования, в которых количество случайных чисел, затрачиваемых на расчет одного ξ , случайно и может оказаться как угодно большим. Конечно, среднее количество случайных чисел, затрачиваемых на одно ξ , должно быть конечным. Среди преобразований такого типа чаще всего встречаются *методы отбора*. К ним относится, например, метод Неймана, изложенный в п. 4.3.

Основная особенность методов отбора: кроме моделирующей формулы задается еще *условие отбора*; например, $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$, если $h(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) > 0$. Чтобы разыграть ξ таким методом, выбирают случайные числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$; если условие отбора выполнено, то по ним вычисляют ξ ; в противном случае эти числа отбрасывают и выбирают новые.

Вероятность того, что группа чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ не будет отброшена

$$\varepsilon = P\{h(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) > 0\},$$

называется *эффективностью* метода отбора. Это — весьма важная характеристика метода. Если выбрать N групп $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, то в среднем получим всего εN значений ξ . Значит, на получение εN значений ξ затрачивается Nm случайных чисел. А на одно значение ξ затрачивается в среднем m/ε случайных чисел. Ясно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ метод становится неэффективным.

Обобщенный метод Неймана. Предположим, что плотность $p(x)$ случайной величины ξ , определенной в интервале $a < x < b$, представима в форме произведения

$$p(x) = p_1(x)f(x),$$

где $p_1(x)$ — плотность вспомогательной случайной величины η' , моделировать которую мы умеем, а множитель $f(x)$ ограничен: $f(x) \leq C$. Конечность интервала (a, b) не предполагается.

Разыгрывать значения ξ можно следующим образом:

- 1) выбираем значение η' и случайное число γ , независимое от η' ; вычисляем $\eta'' = C\gamma$;
- 2) если $\eta'' < f(\eta')$, то полагаем $\xi = \eta'$; в противном случае числа η', γ отбрасываем и выбираем новую пару значений η', γ .

Доказательство. Вероятность того, что точка (η', η'') попадет в полосу $(x, x + dx)$ (рис. 35), равна

случайная величина, независимая от ξ . Тогда плотность случайной точки с декартовыми координатами (ξ, η) на плоскости x, y равна произведению плотностей ξ и η :

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Перейдем к полярным координатам на плоскости: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Пусть ρ, θ — случайные полярные координаты точки (ξ, η) :

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta.$$

Совместная плотность ρ и θ равна

$$\tilde{p}(r, \varphi) = p(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2}.$$

Легко вычислить плотности ρ, θ :

$$\rho_1(r) = \int_0^{2\pi} \tilde{p}(r, \varphi) d\varphi = r e^{-r^2/2},$$

$$\rho_2(\varphi) = \int_0^{\infty} \tilde{p}(r, \varphi) dr = \frac{1}{2\pi}.$$

Так как $\tilde{p}(r, \varphi) = \rho_1(r) \rho_2(\varphi)$, то ρ и θ независимы и легко моделируются — каждая по своей функции распределения. Функции эти достаточно простые:

$$F_1(r) = 1 - e^{-r^2/2}, \quad F_2(\varphi) = \varphi / (2\pi),$$

где $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < 2\pi$. Из уравнений $F_1(\rho) = 1 - \gamma_1$, $F_2(\theta) = \gamma_2$ получим формулы моделирования:

$$\rho = \sqrt{-2 \ln \gamma_1}, \quad \varphi = 2\pi \gamma_2.$$

Окончательные формулы

$$\xi = \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \cos 2\pi \gamma_2, \quad \eta = \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \sin 2\pi \gamma_2$$

позволяют по двум числам γ_1 и γ_2 вычислить два независимых значения нормальной случайной величины с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Однако каждая из этих формул имеет вид $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2)$.

11.3. Преобразования вида $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$.

Пример. Случайную величину ξ с функцией распределения $F(x) = x^n$ при $0 \leq x \leq 1$ можно разыгрывать по формуле

$$\xi = \max(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad (51)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — случайные числа.

В самом деле, очевидно,

$$P\{\xi < x\} = P\{\max_{1 \leq i \leq n} \gamma_i < x\} = P\{\gamma_1 < x, \dots, \gamma_n < x\}$$

и так как $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ независимы, то

$$P\{\gamma_1 < x, \dots, \gamma_n < x\} = P\{\gamma_1 < x\} \dots P\{\gamma_n < x\} = x^n.$$

Если моделировать ξ методом обратных функций (44), то из уравнения $\xi^n = \gamma$ получим, что

$$\xi = \sqrt[n]{\gamma}. \quad (52)$$

Сравнивая (51) с (52), приходим к любопытному выводу: вместо того, чтобы извлекать корень n -й степени из случайного числа, можно найти наибольшее среди n случайных чисел.

Пример. В п. 5.2 рассматривался простейший поток заявок, в котором промежуток времени τ между двумя последовательными заявками есть экспоненциальная случайная величина. В более сложных потоках, называемых потоками Эрланга, промежуток τ представляет собой случайную величину с плотностью вида

$$p(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax}, \quad (53)$$

где $0 \leq x < \infty$. Так как функция

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$$

называется *гамма-функцией*, то и плотность (53) называют *гамма-распределением*. Оказывается, случайную величину ξ с плотностью (53) можно разыгрывать по формуле

$$\xi = -(1/a) \ln(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n).$$

Доказательство мы не приводим. Отметим только, что формула (27) — это частный случай последней формулы, получающийся при $n = 1$.

Использование порядковых статистик. Выберем n случайных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ и расположим их в порядке возрастания:

$$\gamma_{(1)} \leq \gamma_{(2)} \leq \dots \leq \gamma_{(s)} \leq \dots \leq \gamma_{(n)}.$$

Введем вспомогательную случайную величину — случайный номер

$$\kappa \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{pmatrix},$$

так что $P\{\kappa = k\} = c_k$. Докажем, что если выбрать два случайных числа γ_1 и γ_2 , по числу γ_1 разыграть номер κ , а затем вычислить $G_\kappa(\gamma_2)$, то функция распределения этой величины равна $F(x)$.

В самом деле, по известной формуле полной вероятности

$$P\{G_\kappa(\gamma_2) < x\} = \sum_{k=1}^m P\{G_\kappa(\gamma_2) < x | \kappa = k\} P\{\kappa = k\}.$$

Фигурирующая здесь условная вероятность равна

$$P\{G_\kappa(\gamma_2) < x | \kappa = k\} = P\{G_k(\gamma_2) < x\} = P\{\gamma_2 < F_k(x)\} = F_k(x).$$

Следовательно,

$$P\{G_\kappa(\gamma_2) < x\} = \sum_{k=1}^m F_k(x) c_k = F(x).$$

Если существуют соответствующие плотности, то вместо суперпозиции (49) функций распределения можно рассматривать суперпозицию плотностей:

$$p(x) = \sum_{k=1}^m c_k p_k(x).$$

Пример. При рассеянии фотона на холодном электроном косинус угла рассеяния $\mu = \cos \theta$ представляет собой случайную величину с плотностью

$$p(x) = (3/8)(1 + x^2), \quad -1 < x < 1;$$

это так называемый закон Рэлея. Если попытаться моделировать μ методом обратных функций, то получим кубическое уравнение

$$(1/8)(\mu^3 + 3\mu + 4) = \gamma.$$

Воспользуемся методом суперпозиции, полагая $p(x) = 0,75p_1(x) + 0,25p_2(x)$, где $p_1(x) = 0,5$ — постоянная плотность, а $p_2(x) = 1,5x^2$. Соответствующие этим плотностям функции распределения достаточно просты:

$$F_1(x) = (x + 1)/2, \quad F_2(x) = (x^3 + 1)/2.$$

С помощью обратных функций получаем следующую окончательную формулу моделирования:

$$\mu = \begin{cases} 2\gamma_2 - 1, & \gamma_1 < 0,75, \\ \sqrt[3]{2\gamma_2 - 1}, & \gamma_1 > 0,75. \end{cases}$$

Пример. Рассмотрим дискретную случайную величину

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Предположим, что все вероятности в (50) имеют вид $p_i = m_i 2^{-s}$, где m_i — целые числа ($1 \leq m_i \leq 2^s - 1$), и значение s в несколько раз меньше, чем n . Тогда может оказаться выгодным представление ξ в форме суперпозиции не более чем s случайных величин с равновероятными значениями (в п. 4.1 мы видели, что такие величины легко моделируются).

Поясним этот прием на конкретном примере. Пусть в (50) количество возможных значений $n = 19$ и все вероятности $p_i = m_i/64$; числители m_i приведены в табл. 3. В правой части таблицы эти же m_i записаны в двоичной системе; v_k — количество единиц в k -м столбце.

Отсюда следует, что ξ может быть представлена в форме суперпозиции трех случайных величин $\xi^{(k)}$ при $k = 4, 5, 6$: $\xi^{(4)}$ принимает значения $x_1 - x_8$ с вероятностями $1/8$; $\xi^{(5)}$ принимает значения $x_1, x_2, x_9 - x_{16}$ с вероятностями $1/10$; $\xi^{(6)}$ принимает значения $x_3 - x_6, x_9 - x_{13}, x_{17} - x_{19}$ с вероятностями $1/12$.

Соответствующие этим величинам коэффициенты c_k вычисляются по формуле $c_k = v_k 2^{-k}$ и равны $c_4 = 1/2$, $c_5 = 5/16$, $c_6 = 3/16$.

Чтобы записать окончательную формулу для разыгрывания ξ , введем обозначения

$$(y_1, y_2, \dots, y_{10}) = (x_1, x_2, x_9, x_{10}, \dots, x_{16}),$$

$$(z_1, z_2, \dots, z_{12}) = (x_3, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}, \dots, x_{13}, x_{17}, x_{18}, x_{19}).$$

Тогда получается формула

$$\xi = \begin{cases} x_i, & i = 1 + [8\gamma_2], \quad \gamma_1 < 1/2, \\ y_i, & i = 1 + [10\gamma_2], \quad 1/2 < \gamma_1 < 13/16, \\ z_i, & i = 1 + [12\gamma_2], \quad 13/16 < \gamma_1. \end{cases}$$

Если в этом примере использовать метод моделирования из п. 4.1, то придется многократно сравнивать γ с p_1 , $p_1 + p_2$, $p_1 + p_2 + p_3$ и т. д.

Моделирование нормальной случайной величины. Пусть ξ — нормальная случайная величина с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Пусть η — такая же

Таблица 3

i	m _i	k					
		1	2	3	4	5	6
1	6				1	1	0
2	6				1	1	0
3	5				1	0	1
4	5				1	0	1
5	5				1	0	1
6	5				1	0	1
7	4				1	0	0
8	4				1	0	0
9	3					1	1
10	3					1	1
11	3					1	1
12	3					1	1
13	3					1	1
14	2					1	0
15	2					1	0
16	2					1	0
17	1						1
18	1						1
19	1						1
v _k		8 10 12					

$G(y)$ равно одному из x_i , причем

$$P\{G(y) = x_i\} = p_i.$$

Отсюда видно, что метод п. 4.1 — это также частный случай метода обратных функций (44).

Пример. Рассмотрим случайную величину ξ смешанного типа, которая с вероятностью 0,4 равномерно распределена в интервале $0 < x < 2$ и с вероятностью 0,6 равна 1. На рис. 33 изображена разрывная функция распределения $F(x)$ этой величины и обратная функция $G(y)$. Так как

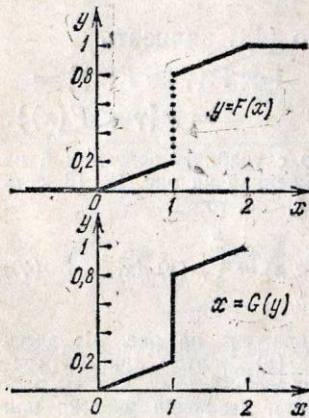


Рис. 33.

то из (44) получается следующая формула для разыгрывания ξ :

$$F(x) = \begin{cases} 0,2x, & 0 < x < 1, \\ 0,2x + 0,6, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

$$\xi = \begin{cases} 5\gamma, & 0 < \gamma < 0,2, \\ 1, & 0,2 < \gamma < 0,8, \\ 5(\gamma - 0,6), & 0,8 < \gamma < 1. \end{cases}$$

Выбор случайного направления в пространстве. Условимся задавать направление единичным вектором, выходящим из начала

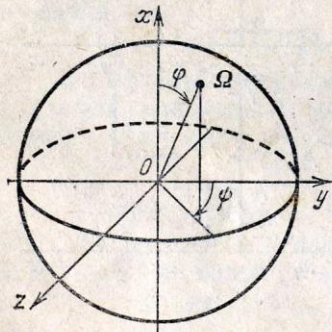


Рис. 34.

равной поверхности единичной сферы. Слова «любое направление одинаково вероятно» означают, что конец вектора представляет собой случайную точку Ω , равномерно распределенную на поверхности этой сферы: вероятность того, что Ω окажется в любом элементе поверхности dS , равна $dS/(4\pi)$.

Выберем на поверхности сферы сферические координаты (φ, ψ) с полярной осью Ox (рис. 34). Тогда

$$dS = \sin \varphi \, d\varphi \, d\psi,$$

причем $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \psi < 2\pi$.

Обозначим через $p(\varphi, \psi)$ плотность случайной точки (φ, ψ) . Из требования

$$p(\varphi, \psi) \, d\varphi \, d\psi = dS/(4\pi)$$

и предыдущего равенства вытекает, что

$$p(\varphi, \psi) = (4\pi)^{-1} \sin \varphi.$$

По совместной плотности φ и ψ нетрудно вычислить плотности этих величин:

$$p_1(\varphi) = \int_0^{2\pi} p(\varphi, \psi) \, d\psi = \frac{1}{2} \sin \varphi,$$

$$p_2(\psi) = \int_0^{\pi} p(\varphi, \psi) \, d\varphi = \frac{1}{2\pi}.$$

Равенство $p(\varphi, \psi) = p_1(\varphi)p_2(\psi)$ показывает, что φ и ψ независимы. Очевидно, ψ равномерно распределена в интервале $(0, 2\pi)$, и формула для разыгрывания ψ запишется в виде

$$\psi = 2\pi\gamma. \quad (47)$$

Формулу для разыгрывания φ получим методом обратных функций (45):

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} p_1(\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) = 1 - \gamma,$$

откуда

$$\cos \varphi = 2\gamma - 1. \quad (48)$$

Формулы (47), (48) позволяют выбирать (разыгрывать) случайное направление. Конечно, значения γ в этих формулах должны быть независимыми.

11.2. Преобразования вида $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2)$. К этому типу преобразований относится весьма часто встречающийся на практике метод суперпозиции.

Предположим, что функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ представима в форме суперпозиции нескольких функций распределения:

$$F(x) = \sum_{k=1}^m c_k F_k(x), \quad (49)$$

где все $c_k > 0$ и $c_1 + c_2 + \dots + c_m = 1$. Предположим также, что случайные величины с функциями распределения $F_k(x)$ мы умеем моделировать, например, с помощью обратных функций $G_k(y)$.

определенная при всех $-\infty < x < \infty$. Очевидно, $0 \leq F(x) \leq 1$. Легко доказать, что с ростом x функция $F(x)$ не убывает и что всегда существуют пределы этой функции: $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Однако $F(x)$ не обязана быть строго монотонной: у нее могут быть интервалы постоянства. И она не обязана быть непрерывной: у нее могут быть скачки.

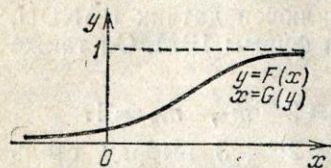


Рис. 30.

Предположим, что функция $y = F(x)$ непрерывна и строго монотонна (рис. 30). Тогда существует непрерывная обратная функция $x = G(y)$, для которой при всех $-\infty < x < \infty$ и при всех $0 < y < 1$

$$G(F(x)) = x, \quad F(G(y)) = y. \quad (42)$$

Докажем, что случайная величина $G(\gamma)$ имеет функцию распределения $F(x)$.

В самом деле,

$$P\{G(\gamma) < x\} = P\{F(G(\gamma)) < F(x)\} = P\{\gamma < F(x)\}. \quad (43)$$

Так как γ равномерно распределена в интервале $(0, 1)$, то вероятность $P\{\gamma < F(x)\} = P\{0 < \gamma < F(x)\}$ равна длине интервала $(0, F(x))$, т. е. равна $F(x)$. Итак, мы доказали, что

$$P\{G(\gamma) < x\} = F(x).$$

Следовательно, случайную величину ξ с непрерывной и строго монотонной функцией распределения $F(x)$ можно разыгрывать по формуле

$$\xi = G(\gamma). \quad (44)$$

Но случайная величина $1 - \gamma$, так же как и γ , равномерно распределена в интервале $(0, 1)$. Поэтому вместо формулы (44) можно использовать формулу

$$\xi = G(1 - \gamma). \quad (45)$$

Разыгрывание случайных величин по формулам (44) или (45) называют *методом обратных функций*.

Оказывается, метод обратных функций позволяет разыгрывать любую случайную величину ξ с произвольной функцией распределения $F(x)$: в том случае, когда обратная функция (в обычном смысле) неоднозначна

или определена не при всех $0 < y < 1$, надо «разумным образом» доопределить ее. Тогда $x = G(y)$ окажется однозначной, неубывающей функцией, и хотя нельзя гарантировать, что при всех $-\infty < x < \infty$ и $0 < y < 1$ будут выполнены равенства (42), будет выполнено более слабое требование: неравенства $G(y) \geq x$ и $y \geq F(x)$ равносильны.

Этого достаточно, чтобы вместо (43) записать

$$P\{G(\gamma) < x\} = 1 - P\{G(\gamma) \geq x\} = 1 - P\{\gamma \geq F(x)\} = P\{\gamma < F(x)\}.$$

Пример. Рассмотрим непрерывную случайную величину ξ из п. 4.2. Легко видеть, что кривая, изображенная на рис. 12, 13, есть часть функции распределения: если $a < x < b$, то

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{a < \xi < x\} = \int_a^x p(x) dx. \quad (46)$$

Полностью функция распределения изображена на рис. 31; здесь же построена и обратная функция $x = G(y)$. В этом примере «разумное» определение обратной функции свелось к тому, что мы рассмотрели только часть функции $y = F(x)$, исключив участки при

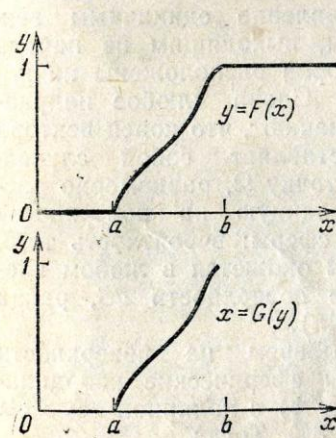


Рис. 31.

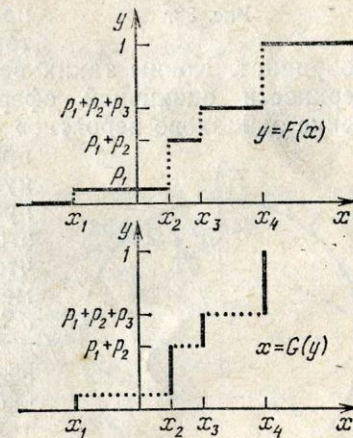


Рис. 32.

$x < a$ и при $x > b$. Очевидно, метод п. 4.2 (см. (23)) совпадает с методом обратных функций (см. (44)).

Пример. Рассмотрим дискретную случайную величину ξ из п. 4.1. Функция распределения этой величины изображена на рис. 32 для частного случая $n = 4$. Здесь же построена и функция $x = G(y)$. Выбрав на оси y какое-нибудь значение γ , заключенное между нулем и единицей, мы обнаружим, что соответствующее значение

Из рассмотренного примера следует, что рассчитывать на успешное использование функции $y = F(x)$ в формуле (38) можно только тогда, когда график этой функции достаточно плотно заполняет весь квадрат.

Таким свойством обладает, например, функция

$$y = \{gx\}, \quad (39)$$

где g — очень большое число, а $\{z\}$ — дробная часть числа z , т. е. $\{z\} = z - [z]$. На рис. 29 построен график такой функции при $g = 2^1$. Читатель может себе представить, как этот график выглядит при $g = 5^{17}$.

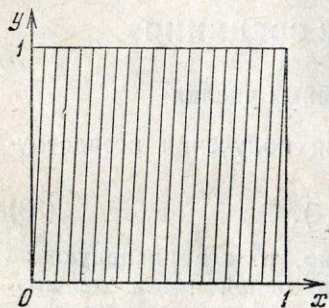


Рис. 29.

10.2. Метод сравнений (метод вычетов). Наиболее распространенный алгоритм для получения псевдослучайных чисел был предложен Д. Леммером. В основе этого алгоритма лежит функция (39), однако для удобства реализации на ЭВМ алгоритм строится несколько иначе.

Определяется последовательность целых чисел m_k , в которой начальное число $m_0 = 1$ задано, а все последующие числа m_1, m_2, \dots вычисляются по одной и той же формуле

$$m_{k+1} \equiv 5^{17} m_k \pmod{2^{40}} \quad (40)$$

при $k = 0, 1, 2, \dots$. По числам m_k вычисляются псевдослучайные числа

$$\gamma_k = 2^{-40} m_k. \quad (41)$$

Формула (40) означает, что число m_{k+1} равно остатку, полученному при делении $5^{17} m_k$ на 2^{40} . В теории сравнений (см. любой учебник по теории чисел) такой остаток называют *наименьшим положительным вычетом по модулю 2^{40}* . Отсюда происходят оба названия алгоритма — *метод сравнений* или *метод вычетов*. Встречающийся изредка термин «конгруэнтный метод» — ошибка перевода: английское слово congruence имеет два различных значения: конгруэнция и сравнение (по модулю).

Формулы (40), (41) легко реализовать на ЭВМ, работающих с 40-разрядными числами, при помощи команды умножения с удвоенным количеством разрядов: надо

использовать младшие цифры произведения. Период последовательности m_0, m_1, m_2, \dots совпадает с отрезком аperiodичности: $P = L = 2^{38}$. Он содержит все целые числа вида $4n + 1$, не превосходящие 2^{40} .

10.3. Случай ЭВМ серии ЕС. Большинство ЭВМ этой серии работают с 31-разрядными числами. В математическое обеспечение этих ЭВМ включен датчик RANDU, рекомендованный специалистами фирмы IBM. Он также реализует метод вычетов:

$$m_{k+1} \equiv gm_k \pmod{2^{31}}, \quad \gamma_k = 2^{-31} m_k, \quad m_0 = 1.$$

Однако множитель $g = 65539 = 2^{16} + 3$ выбран столь неудачно, что датчик оказался практически плохим. Этот факт был обнаружен эмпирически многими вычислителями прежде, чем было дано строгое доказательство непригодности датчика*).

В этом случае можно рекомендовать множитель $g = 5^{13}$. Любопытно, что группа чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ при $N = 100$ расположена на интервале $(0, 1)$ явно неудачно**). Однако при дальнейшем увеличении N распределение улучшается и при $N \geq 500$ оно вполне удовлетворительно. Для этой последовательности $P = L = 2^{29}$.

§ 11. О методах моделирования случайных величин

В этом параграфе приведены наиболее важные способы моделирования случайных величин. В основу классификации таких способов положено количество случайных чисел, затрачиваемых на получение одного значения ξ . Обоснование этой классификации имеется в [3], где она была впервые предложена.

11.1. Преобразования вида $\xi = g(\gamma)$. Среди преобразований такого вида бесспорно первое место занимает метод обратных функций. Мы покажем, что способы разыгрывания дискретных и непрерывных случайных величин, указанные в § 4, представляют собой частные случаи этого общего метода.

Напомним, что *функцией распределения* произвольной случайной величины ξ называется функция

$$F(x) = P\{\xi < x\},$$

*) Форсайт Дж., Малкольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. Переводчик этой книги почему-то счел нужным сопроводить настоятельный призыв авторов «не использовать RANDU» примечанием: «Этот призыв относится, разумеется, к американским читателям книги» ...

**) Это обнаружил Б. В. Шухман.

Как мы и предполагали, второй способ вычисления дал более точный результат.

3. По значениям, приведенным в табл. 1, 2, можно приближенно сосчитать дисперсии $D\eta$ для обоих методов расчета (расчетную формулу см. в п. 6.1). Для метода 1

$$D\eta \approx \frac{\pi^2}{9 \cdot 4} \left[\sum_{j=1}^{10} (\sin \xi_j)^2 - \frac{1}{10} \left(\sum_{j=1}^{10} \sin \xi_j \right)^2 \right] = \\ = \frac{\pi^2}{36} (4,604 - 3,670) = 0,256.$$

Для метода 2

$$D\eta \approx \frac{\pi^4}{9 \cdot 64} \left[\sum_{j=1}^{10} \left(\frac{\sin \xi_j}{\xi_j} \right)^2 - \frac{1}{10} \left(\sum_{j=1}^{10} \frac{\sin \xi_j}{\xi_j} \right)^2 \right] = \\ = \frac{\pi^4}{576} (6,875 - 6,777) = 0,016.$$

Несмотря на то, что значение $N = 10$ невелико и приближенная нормальность оценки (34) не гарантирована, вычислим для обоих методов величины $0,6745 \sqrt{D\eta/N}$. Получим значения 0,103 и 0,027. Легко видеть, что фактические абсолютные погрешности при расчете I , равные 0,048 и 0,016, — величины того же порядка. Заметим, что точные значения $D\eta$ в рассмотренном примере равны 0,233 и 0,0166. Таким образом, и при оценке дисперсий метод 2 оказался точнее метода 1.

ГЛАВА 3

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 10. О псевдослучайных числах

Большинство алгоритмов для получения псевдослучайных чисел имеют вид

$$\gamma_{k+1} = F(\gamma_k). \quad (38)$$

Если начальное число γ_0 задано, то все последующие числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ вычисляются по одной и той же формуле (38) при $k = 0, 1, 2, \dots$. Метод середины квадратов в п. 3.3 также имеет вид (38), но вместо аналитического задания функции $y = F(x)$ была указана совокупность операций, которые надо проделать над аргументом x , чтобы получить значение y .

10.1. Какой должна быть функция $F(x)$. Следующий пример позволяет понять, в чем состоит одна из основных трудностей при выборе $F(x)$.

Пример. Докажем, что функцию $y = F(x)$, график которой изображен на рис. 28, нельзя использовать для получения псевдослучайных чисел по формуле (38).

В самом деле, рассмотрим в единичном квадрате $\{0 < x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$ точки с декартовыми координатами

$$(\gamma_1, \gamma_2), (\gamma_3, \gamma_4), (\gamma_5, \gamma_6), \dots$$

Так как здесь $\gamma_2 = F(\gamma_1)$, $\gamma_4 = F(\gamma_3)$, $\gamma_6 = F(\gamma_5)$, ..., то все эти точки расположены на кривой $y = F(x)$. И это очень плохо, ибо настоящие случайные точки должны равномерно заполнять весь квадрат.

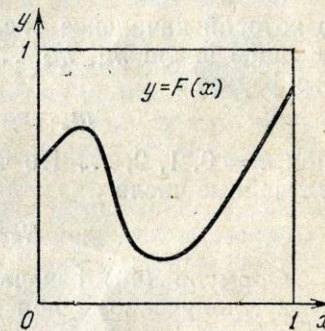


Рис. 28.

Использовать «наилучшую» плотность $p_0(x)$ для расчета практически невозможно: для этого нужно знать значение интеграла $\int_a^b |g(x)| dx$. А вычисление этого ин-

теграла представляет собой задачу, равноценную задаче о вычислении интеграла (33). Поэтому ограничиваются следующей рекомендацией: желательно, чтобы плотность $p(x)$ была пропорциональна $|g(x)|$.

Конечно, выбирать очень сложные $p(x)$ нельзя, так как процедура разыгрывания ξ станет очень трудоемкой. Но руководствоваться этой рекомендацией при выборе $p(x)$ можно (см. п. 9.3). Оценку (34) с плотностью $p(x)$, сходной с $|g(x)|$, называют *существенной выборкой*.

На практике интегралы вида (33) методом Монте-Карло не вычисляют; для этого есть более точные методы — квадратурные формулы. Однако при переходе к многократным интегралам положение меняется: квадратурные формулы становятся очень сложными, а метод Монте-Карло остается почти без изменений.

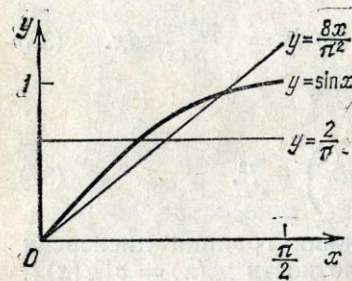


Рис. 27.

Мы используем для вычисления две различные случайные величины ξ : с постоянной плотностью $p(x) = 2/\pi$ (т. е. ξ равномерно распределена в интервале $(0, \pi/2)$) и с линейной плотностью $p(x) = 8x/\pi^2$. Обе эти плотности вместе с подынтегральной функцией $\sin x$ построены на рис. 27, из которого видно, что линейная плотность более соответствует рекомендации п. 9.2 о том, что желательна пропорциональность $p(x)$ и $|\sin x|$. Поэтому нужно ожидать, что второй способ вычисления даст лучший результат.

1. Пусть $p(x) = 2/\pi$. Формула для разыгрывания ξ может быть получена из (24) при $a = 0, b = \pi/2$:

$$\xi = (\pi/2)\gamma.$$

А формула (34) примет вид

$$I \approx \frac{\pi}{2N} \sum_{j=1}^N \sin \xi_j.$$

Пусть $N = 10$. В качестве значений γ используем тройки чисел из табл. А, умноженные на 0,001. Промежуточные результаты сведены в табл. 1. Результат расчета: $I \approx 0,952$.

Таблица 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ_j	0,865	0,159	0,079	0,566	0,155	0,664	0,345	0,655	0,812	0,332
ξ_j	1,359	0,250	0,124	0,889	0,243	1,043	0,542	1,029	1,275	0,521
$\sin \xi_j$	0,978	0,247	0,124	0,776	0,241	0,864	0,516	0,857	0,957	0,498

2. Пусть теперь $p(x) = 8x/\pi^2$. Для разыгрывания ξ используем (23):

$$\int_0^{\xi} \frac{8x}{\pi^2} dx = \gamma,$$

откуда после несложных вычислений получим

$$\xi = (\pi/2) \sqrt{\gamma}.$$

Формула (34) примет вид

$$I \approx \frac{\pi^2}{8N} \sum_{j=1}^N \frac{\sin \xi_j}{\xi_j}.$$

Пусть $N = 10$. Числа γ выберем те же, что в случае 1. Промежуточные результаты сведены в табл. 2. Результат расчета: $I \approx 1,016$.

Таблица 2

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ_j	0,865	0,159	0,079	0,566	0,155	0,664	0,345	0,655	0,812	0,332
ξ_j	1,461	0,626	0,442	1,182	0,618	1,280	0,923	1,271	1,415	0,905
$\frac{\sin \xi_j}{\xi_j}$	0,680	0,936	0,968	0,783	0,937	0,748	0,863	0,751	0,698	0,868

метод п. 1.2. Вместо этого мы изложим другой, более эффективный метод, позволяющий строить разные вероятностные модели для решения этой задачи методом Монте-Карло, и укажем, как среди них выбирать модели «лучше».

9.1. Метод вычисления. Рассмотрим функцию $g(x)$, заданную на интервале $a < x < b$. Требуется приближенно вычислить интеграл

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad (33)$$

(если этот интеграл несобственный, то дополнительно предполагаем, что он сходится абсолютно).

Выберем произвольную плотность распределения $p(x)$, определенную на интервале (a, b) (т. е. произвольную функцию $p(x)$, удовлетворяющую условиям (15), (16)). Наряду со случайной величиной ξ , определенной в интервале (a, b) с плотностью $p(x)$, нам понадобится случайная величина

$$\eta = g(\xi)/p(\xi).$$

Согласно (18)

$$M\eta = \int_a^b \frac{g(x)}{p(x)} p(x) dx = I.$$

Рассмотрим теперь N одинаковых независимых случайных величин $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$ и применим к их сумме центральную предельную теорему. Формула (21) в этом случае запишется так:

$$P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j - I \right| < 3 \sqrt{\frac{D\eta}{N}} \right\} \approx 0,997.$$

Последнее соотношение означает, что если мы выберем N значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, то при достаточно большом N

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{g(\xi_j)}{p(\xi_j)} \approx I. \quad (34)$$

Оно показывает также, что с очень большой вероятностью погрешность приближения (34) не превосходит $3 \sqrt{D\eta/N}$.

9.2. Существенная выборка. Мы видели, что для расчета интеграла (33) можно использовать любую случайную величину ξ , определенную в интервале (a, b) с плотностью $p(x) > 0^*$. В любом случае $M\eta = M[g(\xi)/p(\xi)] = I$. Однако дисперсия $D\eta$, а с ней и оценка погрешности формулы (34) зависят от того, какую величину ξ мы используем, ибо

$$D\eta = M\eta^2 - I^2 = \int_a^b \frac{g^2(x)}{p(x)} dx - I^2. \quad (35)$$

Докажем, что это выражение будет минимальным тогда, когда $p(x)$ пропорциональна $|g(x)|$.

Для этого воспользуемся хорошо известным в математическом анализе неравенством

$$\left(\int_a^b |u(x)v(x)| dx \right)^2 \leq \int_a^b u^2(x) dx \int_a^b v^2(x) dx,$$

в котором положим $u = g(x)/\sqrt{p(x)}$, $v = \sqrt{p(x)}$. Получим неравенство

$$\left(\int_a^b |g(x)| dx \right)^2 \leq \int_a^b \frac{g^2(x)}{p(x)} dx \int_a^b p(x) dx = \int_a^b \frac{g^2(x)}{p(x)} dx. \quad (36)$$

Из (35), (36) следует, что

$$D\eta \geq \left(\int_a^b |g(x)| dx \right)^2 - I^2. \quad (37)$$

Остается доказать, что нижняя граница дисперсии (37) реализуется при выборе плотности $p_0(x) = c|g(x)|$. Сделать это совсем нетрудно, так как из условия нормировки $p_0(x)$ следует, что

$$c = \left(\int_a^b |g(x)| dx \right)^{-1}.$$

Значит,

$$\int_a^b \frac{g^2(x)}{p_0(x)} dx = \frac{1}{c} \int_a^b |g(x)| dx = \left(\int_a^b |g(x)| dx \right)^2,$$

и правая часть (35) обращается в правую часть (37).

*) Вообще говоря, плотность $p(x)$ может обращаться в нуль (см. сноску в п. 2.2), но только в тех точках, в которых $g(x) = 0$.

галактик, квазаров, аккреционных дисков, расположенных вокруг черных дыр. Чрезвычайно эффективным методом расчета комптонизации оказался метод Монте-Карло.

(В действительности фотоны не обязаны рождаться в центре облака: например, там может находиться черная дыра. Но расчеты показали, что вид спектра излучения, выходящего из облака, при больших $h\nu$ не зави-

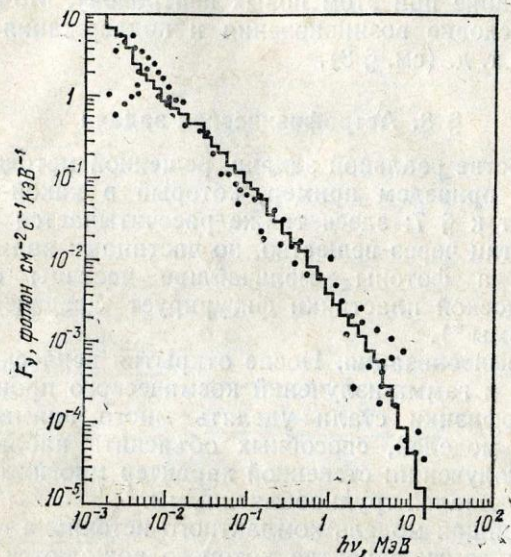


Рис. 26.

сит от расположения рождающихся фотонов внутри облака. Как говорят физики, фотон, испытавший несколько рассеяний, забывает о месте своего рождения...)

8.2. Конкретный пример. Рис. 26, заимствованный из вышеупомянутой работы, показывает попытку промоделировать спектр излучения ядра сейфертовской галактики NGC 4151. Величина потока фотонов F_ν , отложенная по вертикали, пропорциональна плотности вероятностей вылета фотона с энергией $h\nu$. Точки — экспериментальные данные; погрешности этих данных, порой весьма значительные, здесь не указаны.

Гистограмма на рис. 26 сосчитана методом Монте-Карло: распределение рождающихся фотонов по частотам предполагалось планковским с температурой T_r , а распределение электронов по скоростям — максвел-

ловским с температурой T_e . Численные значения: $kT_r = 0,5$ эВ, $kT_e = 2$ МэВ, радиус облака равен 0,4 средней длины свободного пробега фотона по отношению к холодным электронам.

Из рис. 26 видно, что в весьма широком интервале энергий, приблизительно от $h\nu = 0,01$ МэВ до $h\nu = 6$ МэВ, величины $\lg F_\nu$ пропорциональны $\lg h\nu$. По наклону гистограммы на этом участке нетрудно оценить угловой коэффициент приближающей ее прямой и убедиться в том, что

$$F_\nu \sim (h\nu)^{-1,2}.$$

При дальнейшем увеличении $h\nu$ характер спектра меняется: намечается экспоненциальный обрыв.

8.3. О методике расчета. Как уже упоминалось, прохождение фотонов через облако можно моделировать так, как это делалось в § 7. Конечно, энергию каждого рождающегося фотона придется разыгрывать с помощью распределения Планка; скорость рассеивающего электрона также придется разыгрывать; придется каждый раз вычислять среднюю длину свободного пробега фотона, ибо она зависит от $h\nu$ и т. д. Выписывать здесь расчетные формулы вряд ли целесообразно.

Интереснее обратить внимание на то, что вероятности на правом краю спектра (см. рис. 26) в 10^6 раз меньше, чем вероятности на левом краю. Ясно, что путем имитационного моделирования вычислить такие вероятности невозможно. И действительно, гистограмму, приведенную на этом рисунке, удалось сосчитать только благодаря использованию весов, причем более сложных, чем описанные в п. 7.3: для фотона с весом ω_k после k -го рассеяния вычислялась вероятность прямого вылета L_k ; часть фотона с весом $\omega_k L_k$ прибавлялась к счетчику вылетов, а для оставшейся части с весом $\omega_{k+1} = \omega_k(1 - L_k)$ разыгрывалось $k + 1$ -е рассеяние.

§ 9. Вычисление определенного интеграла

Задачи, рассмотренные в предыдущих параграфах, были вероятностными по своей природе, и использование метода Монте-Карло для их решения казалось довольно естественным. Здесь рассматривается просто математическая задача: приближенное вычисление определенного интеграла.

Так как вычисление таких интегралов равносильно вычислению площадей, то можно было бы использовать

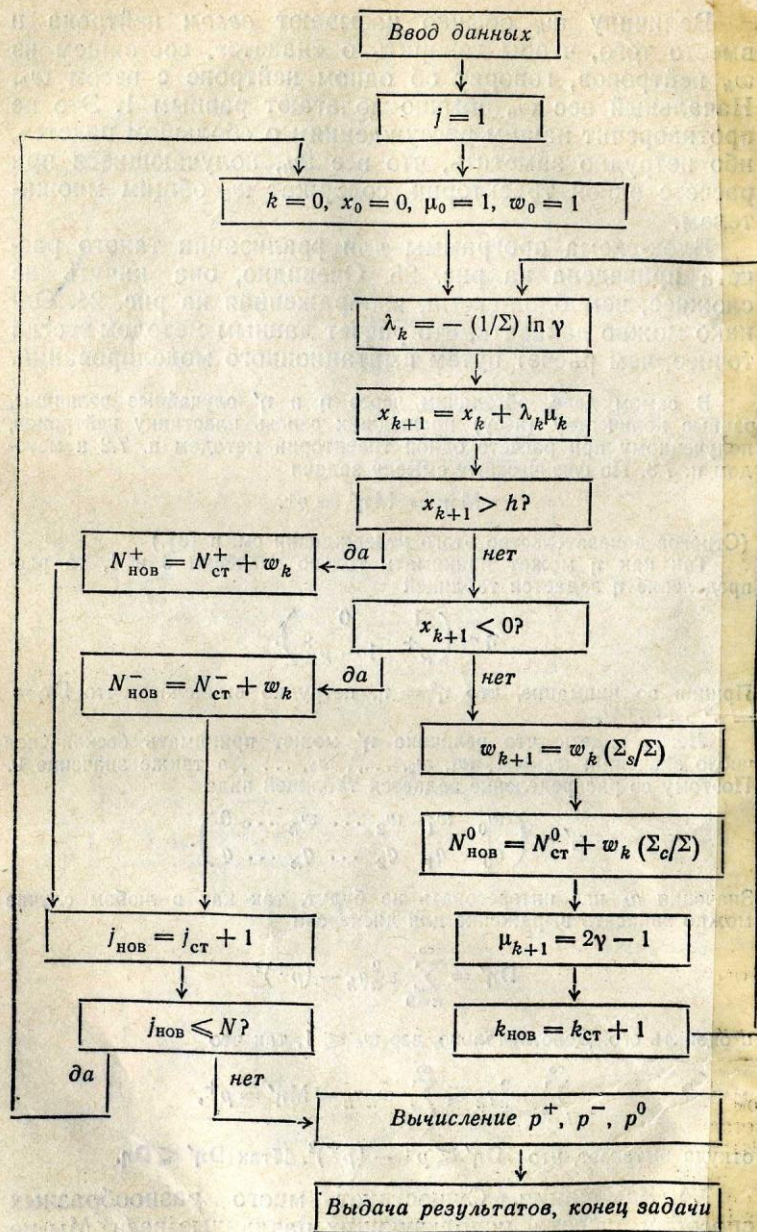


Рис. 25.

что метод Монте-Карло позволяет решать гораздо более сложные задачи об элементарных частицах: исследуемая среда может состоять из различных веществ и иметь любую геометрическую структуру; энергия частицы при каждом столкновении может меняться. Можно учитывать много других ядерных процессов (например, возможность деления атома при столкновении с нейтроном и образование при этом новых нейтронов). Можно рассчитать условие возникновения и поддержания цепной реакции и т. д. (см. § 8).

§ 8. Астрофизическая задача

В качестве реальной задачи, решенной методом Монте-Карло, приведем пример, который в какой-то мере примыкает к § 7: здесь также рассчитывается прохождение частиц через вещество, но частицами являются не нейтроны, а фотоны — мельчайшие частицы света, и вместо плоской пластинки фигурирует сферическое облако плазмы*).

8.1. Комptonизация. После открытия всплесков рентгеновских и гамма-излучений космического происхождения астрофизики стали уделять много внимания построению моделей, способных объяснить наблюдаемые спектры излучений: степенной характер многих спектров поначалу казался труднообъяснимым.

Простейшая модель компактного источника — облако горячей плазмы, в центре которого рождаются фотоны низкой частоты ν . Многократно рассеиваясь на горячих электронах плазмы, фотоны увеличивают свою энергию $h\nu$ и покидают облако в виде жесткого рентгеновского или гамма-излучения.

Как известно, изменение частоты фотона при рассеянии на электроне называется *эффектом Комптона*; поэтому указанный выше процесс получил название *комptonизации*. Комptonизация позволяет объяснить наблюдаемые спектры излучения нейтронных звезд, ядер

*) Поздняков Л. А., Соболев И. М., Сюняев Р. А. Комptonизация и формирование спектров рентгеновских источников. Методика расчетов методом Монте-Карло. — Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР. Сер. Астрономия, 1981, 21.

Более полный вариант см. Pozdnyakov L. A., Sobol I. M., Syunyaev R. A. Comptonization and the shaping of X-ray source spectra: Monte Carlo calculations. — In: Soviet scientific reviews. Sect. E: Astrophys. and space phys. reviews. Harwood Acad. Publishers, 1983, 2, p. 189—331.

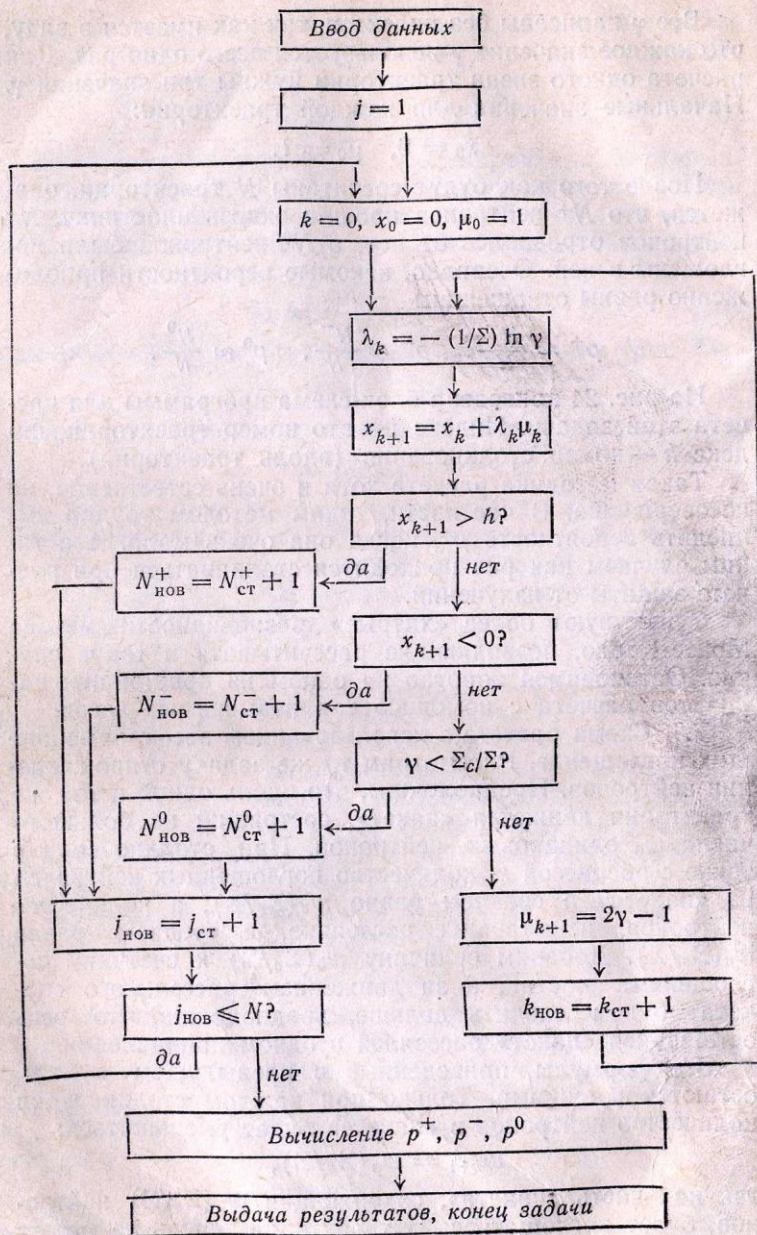


Рис. 24.

Величину w_k обычно называют *весом* нейтрона и вместо того, чтобы говорить о «пакете», состоящем из w_k нейтронов, говорят об одном нейтроне с весом w_k . Начальный вес w_0 обычно полагают равным 1. Это не противоречит нашим рассуждениям о «большом пакете», ибо нетрудно заметить, что все w_k , получающиеся при расчете одной траектории, содержат w_0 общим множителем.

Блок-схема программы для реализации такого расчета приведена на рис. 25. Очевидно, она ничуть не сложнее, чем блок-схема, изображенная на рис. 24. Однако можно доказать, что расчет данным методом всегда точнее, чем расчет путем имитационного моделирования.

В самом деле, обозначим через η и η' случайные величины, равные количеству (весу) прошедших сквозь пластинку нейтронов, полученному при расчете одной траектории методом п. 7.2 и методом п. 7.3. По физическому смыслу задачи

$$M\eta = M\eta' = p^+.$$

(Строгое доказательство этого утверждения см. в [3].)

Так как η может принимать только значения 0 и 1, то распределение η задается таблицей

$$\eta \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^+ & 1 - p^+ \end{pmatrix}.$$

Приняв во внимание, что $\eta^2 = \eta$, нетрудно вычислить, что $D\eta = p^+ - (p^+)^2$.

Легко видеть, что величина η' может принимать бесконечное число значений: $w_0 = 1, w_1, w_2, \dots, w_k, \dots$, а также значение 0. Поэтому ее распределение задается таблицей вида

$$\eta' \sim \begin{pmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & \dots & w_k & \dots & 0 \\ q_0 & q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q \end{pmatrix}.$$

Значения q_k нас интересовать не будут, так как в любом случае можно записать выражение для дисперсии

$$D\eta' = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^2 q_k - (p^+)^2$$

и оценить его. Действительно, все $w_k \leq 1$, так что

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k^2 q_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} w_k q_k = M\eta' = p^+,$$

откуда вытекает, что $D\eta' \leq p^+ - (p^+)^2$. Итак $D\eta' \leq D\eta$.

7.4. Замечания. Существует много разнообразных способов расчета, использующих различные веса. Мы не станем здесь на них останавливаться. Отметим только,

угла $\mu = \cos \varphi$ был равномерно распределен в интервале $(-1, 1)$. Из (24) при $a = -1$, $b = 1$ следует формула для разыгрывания μ :

$$\mu = 2\gamma - 1.$$

7.2. Схема расчета путем моделирования истинных траекторий. Предположим, что нейтрон испытал k -е рассеяние внутри пластинки в точке с абсциссой x_k и после этого начал двигаться в направлении μ_k . Разыграем длину свободного пробега

$$\lambda_k = -(1/\Sigma) \ln \gamma$$

и вычислим абсциссу следующего столкновения (рис. 23)

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k.$$

Проверим условие прохождения сквозь пластинку:

$$x_{k+1} > h.$$

Если это условие выполнено, то счет траектории нейтрона заканчивается и добавляется единица к счетчику прошедших частиц. В противном случае проверяем условие отражения:

$$x_{k+1} < 0.$$

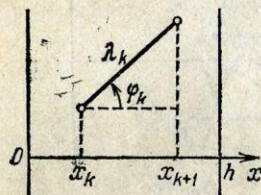


Рис. 23.

Если это условие выполнено, то счет траектории заканчивается и добавляется единица к счетчику отраженных частиц. Если же и это условие не выполнено, т. е. $0 \leq x_{k+1} \leq h$, то, значит, нейтрон испытал

$k+1$ -е столкновение внутри пластинки, и надо разыграть «судьбу» нейтрона при столкновении.

Согласно п. 4.1 выбираем очередное значение γ и проверяем условие поглощения:

$$\gamma < \Sigma_c / \Sigma.$$

Если последнее неравенство выполнено, то счет траектории заканчивается и добавляется единица к счетчику поглощенных частиц. В противном случае мы считаем, что нейтрон испытал рассеяние в точке с абсциссой x_{k+1} . Тогда разыгрываем новое направление скорости нейтрона

$$\mu_{k+1} = 2\gamma - 1$$

и затем повторяем весь цикл снова (но, конечно, уже с другими значениями γ).

Все γ написаны без индексов, так как имеется в виду, что каждое значение γ используется всего один раз. Для расчета одного звена траектории нужны три значения γ . Начальные значения для каждой траектории:

$$x_0 = 0, \quad \mu_0 = 1.$$

После того как будут сосчитаны N траекторий, окажется, что N^+ нейтронов прошли сквозь пластинку, N^- нейтронов отразились от нее, а N^0 нейтронов были поглощены в ней. Очевидно, искомые вероятности приближенно равны отношениям

$$p^+ \approx \frac{N^+}{N}, \quad p^- \approx \frac{N^-}{N}, \quad p^0 \approx \frac{N^0}{N}.$$

На рис. 24 приведена блок-схема программы для расчета этой задачи. Индекс j — это номер траектории, индекс k — номер столкновения (вдоль траектории).

Такая методика расчета хотя и очень естественна, но несовершенна. В частности, таким методом трудно вычислить вероятность p^+ , когда она очень мала. А с таким случаем как раз приходится сталкиваться при расчете защиты от излучений.

Существуют более «хитрые» разновидности метода Монте-Карло, позволяющие рассчитывать и такие случаи. Остановимся коротко на одном из простейших вариантов расчета с помощью так называемых весов.

7.3. Схема расчета с использованием весов, заменяющих поглощение. Рассмотрим ту же задачу о прохождении нейтронов. Предположим, что вдоль одной и той же траектории движется «пакет», состоящий из большого числа w_0 одинаковых нейтронов. При столкновении в точке с абсциссой x_1 количество поглощенных нейтронов из «пакета» в среднем равно $w_0(\Sigma_c/\Sigma)$, а количество нейтронов, испытавших рассеяние, в среднем равно $w_0(\Sigma_s/\Sigma)$. Добавим величину $w_0(\Sigma_c/\Sigma)$ к счетчику поглощенных частиц, а за движением рассеянного «пакета» будем следить дальше, предположив, что весь оставшийся «пакет» рассеялся в одном направлении.

Все формулы, приведенные в предыдущем пункте, остаются прежними. Только при каждом столкновении количество нейтронов в «пакете» будет уменьшаться:

$$w_{k+1} = w_k(\Sigma_s/\Sigma),$$

так как часть «пакета», содержащая $w_k(\Sigma_c/\Sigma)$ нейтронов, будет поглощаться. И траектория теперь не может закончиться поглощением.

6.4. Замечание. К сожалению, расчеты такого типа пока проводят редко. В чем главная причина этого — трудно сказать. Скорее всего в том, что конструкторы и проектировщики не знают о такой возможности.

К тому же, прежде чем рассчитывать таким методом какие-либо изделия, надо изучить вероятностные характеристики всех элементов, входящих в эти изделия. Это немалая работа. Правда, зная эти характеристики, можно оценивать качество любых изделий, состоящих из этих элементов. Можно оценивать изменение качества при замене одних элементов другими.

Нужно надеяться, что в ближайшие годы такие расчеты станут привычным делом. А вероятностные характеристики элементов будут всегда выдаваться предприятиями, их изготавливающими.

§ 7. Расчет прохождения нейтронов сквозь пластинку

Вероятностные законы взаимодействия отдельной элементарной частицы (нейтрона, фотона, мезона и др.) с веществом известны. Обычно требуется найти макроскопические характеристики процессов, в которых участвует огромное количество таких частиц: плотности, потоки и т. п. Эта ситуация похожа на ту, с которой мы сталкивались в §§ 5, 6, и весьма удобна для использования метода Монте-Карло.

Пожалуй, чаще всего метод Монте-Карло используется в нейтронной физике. Мы рассмотрим простейший вариант задачи о прохождении нейтронов сквозь пластинку.

7.1. Постановка задачи. Пусть на однородную бесконечную пластинку толщины $0 \leq x \leq h$ падает поток нейтронов с энергией E_0 . Угол падения 90° . При столкновении с атомами вещества, из которого состоит пластинка, нейтроны могут упруго рассеиваться или поглощаться. Предположим, для простоты, что энергия нейтрона при рассеянии не меняется и любое направление «отскока» нейтрона от атома одинаково вероятно (последнее иногда справедливо в веществах с тяжелыми атомами). На рис. 22 изображены различные варианты взаимодействия нейтронов с пластинкой: *a* — нейтрон проходит сквозь пластинку, *б* — нейтрон поглощается в пластинке, *в* — нейтрон отражается пластинкой. Требуется вычислить вероятность прохождения нейтрона сквозь пластинку p^+ , вероятность отражения нейтрона пластин-

кой p^- и вероятность поглощения нейтрона в пластинке p^0 .

Взаимодействие нейтронов с веществом характеризуется в рассматриваемом случае двумя постоянными Σ_c и Σ_s , которые называются *сечением поглощения* и *сечением рассеяния* (индексы *c* и *s* — это первые буквы английских слов capture — захват и scattering — рассеяние). Сумма этих сечений

$$\Sigma = \Sigma_c + \Sigma_s$$

называется *полным сечением*.

Физический смысл сечений следующий: при столкновении нейтрона с атомом вещества вероятность поглощения равна Σ_c/Σ , а вероятность рассеяния равна Σ_s/Σ .

Длина свободного пробега нейтрона λ (т. е. длина пути от столкновения до столкновения) — это случайная величина. Она может принимать любые положительные значения с плотностью вероятностей

$$p(x) = \Sigma e^{-\Sigma x}.$$

Нетрудно заметить, что эта плотность величины λ совпадает с плотностью (26) случайной величины τ для простейшего потока заявок. По аналогии с п. 5.2 мы можем сразу написать выражение для средней длины свободного пробега:

$$M\lambda = 1/\Sigma$$

и формулу для разыгрывания λ :

$$\lambda = -(1/\Sigma) \ln \gamma.$$

Остается еще выяснить, как выбирать случайное направление нейтрона после рассеяния. Так как задача симметрична относительно оси x , то направление вполне определяется одним углом φ между направлением скорости нейтрона и осью Ox . Можно доказать*), что требование равной вероятности любого направления в этом случае равносильно требованию, чтобы косинус этого

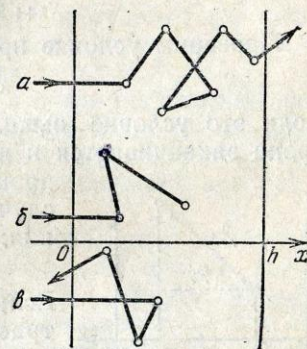


Рис. 22.

*) Доказательство см. в п. 11.1.

случайной величины Θ . Повторив этот опыт N раз, можем считать, что

$$M\Theta \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N t_j,$$

где t_j — значение t , полученное в j -м опыте.

Необходимо заметить, что вопрос о распределении времени безотказной работы $\Theta_{(k)}$ для отдельных элементов не так уж прост: для наиболее долговечных элементов организация эксперимента затруднительна, так как нужно дождаться, пока выйдет из строя достаточно много элементов.

6.3. Дальнейшие возможности метода. Приведенные примеры показывают, что методика расчета качества проектируемых изделий проста по идее. Нужно знать вероятностные характеристики всех элементов изделия и уметь вычислять интересующую нас величину, как функцию от параметров этих элементов. Тогда случайность параметров можно учесть путем моделирования.

При моделировании можно получить гораздо больше полезной информации, а не только математическое ожидание и дисперсию интересующей нас величины.

Пусть, например, мы получили большое число N значений U_1, U_2, \dots, U_N случайной величины U . По этим значениям можно построить приближенную плотность распределения U . Вопрос этот относится, по существу, к статистике, так как речь идет об обработке результатов экспериментов (только проведены они на ЭВМ). Поэтому ограничимся лишь конкретным примером.

Допустим, что мы получили всего $N = 120$ значений U_1, U_2, \dots, U_{120} случайной величины U , и все они заключены в пределах $1 < U_j < 6,5$. Разобьем интервал

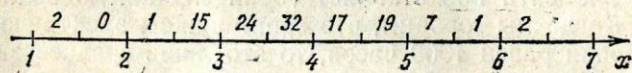


Рис. 20.

$1 < x < 6,5$ на 11 (любое число, не слишком большое и не слишком малое) равных интервалов длиной $\Delta x = 0,5$ и сосчитаем, сколько значений U_j попали в каждый интервал. Числа попаданий приведены на рис. 20. Частота попадания в какой-либо интервал получается делением числа попаданий на $N = 120$. В нашем

примере частоты равны: 0,017; 0; 0,008; 0,12; 0,20; 0,27; 0,14; 0,16; 0,06; 0,008; 0,017.

Над каждым из интервалов разбиения построим прямоугольник, площадь которого равна частоте попадания U_j в этот интервал (рис. 21). Иначе говоря, высота каждого прямоугольника равна частоте, деленной на Δx . Полученную ступенчатую линию называют *гистограммой*. Гистограмма служит приближением к неизвестной

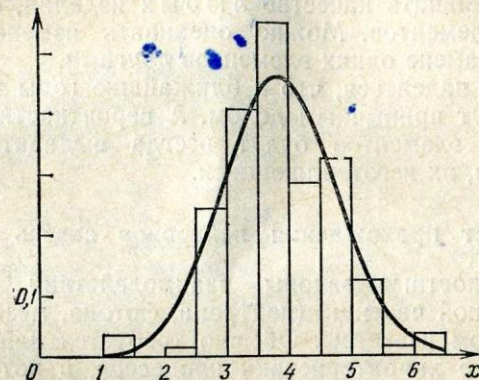


Рис. 21.

плотности случайной величины U . Поэтому, например, площадь гистограммы, заключенная между $x = 2,5$ и $x = 5,5$, дает нам приближенное значение вероятности

$$P\{2,5 < U < 5,5\} \approx 0,95.$$

Следовательно, на основании проведенного расчета (опыта) можно считать, что с вероятностью, приблизительно равной 0,95, величина U заключена в интервале $2,5 < U < 5,5$.

На рис. 21 для сравнения построена плотность нормальной случайной величины ζ' с параметрами $a = 3,85$, $\sigma = 0,88$. Если по этой плотности вычислить вероятность того, что ζ' заключена в интервале $2,5 < \zeta' < 5,5$, то получим довольно близкое значение 0,91. В самом деле, согласно формулам п. 2.3

$$P\{2,5 < \zeta' < 5,5\} = 0,5[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)],$$

где $t_1 = (2,5 - a)/\sigma = -1,54$, $t_2 = (5,5 - a)/\sigma = 1,88$. Поэтому

$$P\{2,5 < \zeta' < 5,5\} = 0,5[\Phi(1,88) + \Phi(1,54)] = 0,91.$$

Поэтому разумнее считать параметры всех элементов и саму величину U случайными величинами и попытаться оценить математическое ожидание MU и дисперсию DU . Величина MU — это среднее значение U для всей партии изделий, а величина DU показывает, какие отклонения U от MU будут встречаться на практике. Напомним (см. п. 2.2), что

$$MU \neq f(MR_{(1)}, MR_{(2)}, \dots; MC_{(1)}, MC_{(2)}, \dots; \dots).$$

Вычислить аналитически распределение U при сложной функции f невозможно. Иногда это можно сделать экспериментально, просмотрев большую партию готовых изделий. Но это возможно далеко не всегда, а на стадии проектирования — никогда.

Попробуем применить метод Монте-Карло. Для этого нужно: а) знать вероятностные характеристики всех элементов, б) знать функцию f (точнее, уметь вычислять значение U по любым фиксированным значениям $R_{(1)}, R_{(2)}, \dots; C_{(1)}, C_{(2)}, \dots; \dots$).

Вероятностное распределение параметров для каждого отдельного элемента можно получить экспериментально, путем просмотра большой партии таких элементов. Часто это распределение оказывается нормальным. Поэтому многие исследователи поступают следующим образом: например, считают сопротивление элемента, изображенного на рис. 17, нормальной случайной величиной ρ с математическим ожиданием $M\rho = 22$ и с $3\sigma = 1,1$ (напомним, что получить в одном опыте значение ρ , отклоняющееся от $M\rho$ больше чем на 3σ , практически невозможно, см. (20)).

Схема расчета оказывается очень простой: для каждого элемента разыгрывается значение параметра; затем по формуле (30) вычисляется значение U . Повторив этот опыт N раз и получив значения U_1, U_2, \dots, U_N , можем приближенно считать, что

$$MU \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i,$$

$$DU \approx \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N U_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N U_i \right)^2 \right].$$

При больших N в последней формуле можно заменить множитель $1/(N-1)$ на $1/N$, и тогда эта формула

окажется простым следствием формул (8), (9). В математической статистике доказывается, что при небольших N лучше сохранить множитель $1/(N-1)$.

6.2. Примеры расчета надежности. Пусть мы хотим оценить среднее время безотказной работы изделия, предполагая, что известны характеристики безотказной работы каждого из элементов.

Если считать, что время безотказной работы каждого элемента $t_{(k)}$ — фиксированная величина, то вычислить время безотказной работы t изделия не составит труда.

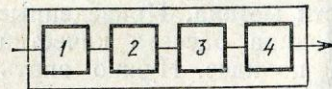


Рис. 18.

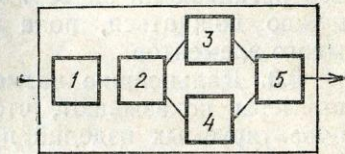


Рис. 19.

Например, для изделия, схематически изображенного на рис. 18, в котором выход из строя одного элемента влечет за собой выход из строя всего изделия,

$$t = \min(t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)}, t_{(4)}). \quad (31)$$

А для изделия, схематически изображенного на рис. 19, в котором один из элементов дублирован,

$$t = \min[t_{(1)}, t_{(2)}, \max(t_{(3)}, t_{(4)}), t_{(5)}], \quad (32)$$

так как если, например, элемент 3 выйдет из строя, то изделие будет продолжать работать на одном элементе 4.

В действительности время безотказной работы любого элемента представляет собой случайную величину $\Theta_{(k)}$. Когда мы говорим, что срок службы электрической лампочки равен 1000 часов, то это лишь среднее значение $M\Theta$ величины Θ : всем известно, что одна лампочка перегорает быстрее, а другая (в точности такая же) горит дольше.

Если известны плотности распределений $\Theta_{(k)}$ для каждого из элементов изделия, то $M\Theta$ можно сосчитать методом Монте-Карло так, как это сделано в п. 6.1. В самом деле, для каждого элемента можно разыграть значение величины $\Theta_{(k)}$ — пусть это будет $t_{(k)}$. Затем по формуле (31) или (32) можно вычислить значение t

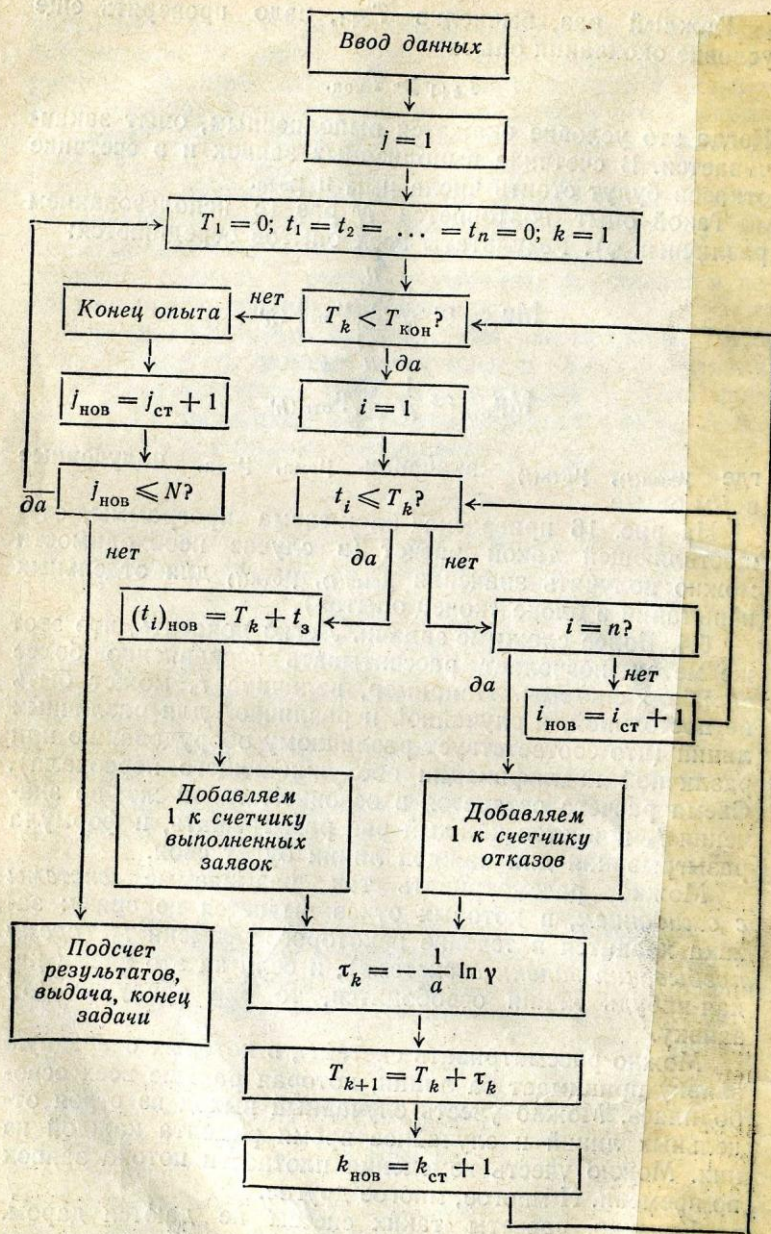


Рис. 16.

ценность, надо выбрать хорошую модель. Для этого приходится достаточно тщательно изучать действительные потоки заявок, проводить хронометраж работы отдельных узлов и т. п. Вообще надо знать вероятностные законы функционирования отдельных частей системы. Тогда метод Монте-Карло позволяет вычислить вероятностные законы работы всей системы, как бы сложна она ни была.

Такие методы расчета чрезвычайно полезны при планировании предприятий: вместо дорогостоящего (а иногда просто невозможного) эксперимента в натуре мы можем экспериментировать на ЭВМ, моделируя разные варианты организации работы или использования оборудования.

§ 6. Расчет качества и надежности изделий

6.1. Простейшая схема расчета качества. Рассмотрим изделие S , состоящее из некоторого (может быть большого) числа элементов. Например, если S представляет собой электрический прибор, то элементами его могут быть сопротивления ($R_{(k)}$), емкости ($C_{(k)}$), лампы и т. п. Предположим, что качество изделия определяется значением одного выходного параметра U , которое можно вычислить, зная параметры всех элементов

$$U = f(R_{(1)}, R_{(2)}, \dots; C_{(1)}, C_{(2)}, \dots; \dots). \quad (30)$$

Если, например, U — это напряжение на рабочем участке электрической цепи, то по законам Ома можно составить уравнения для цепи и, решая их, найти U .

В действительности, однако, параметры элементов не равны в точности указанным значениям. Например, сопротивление, изображенное на рис. 17, может оказаться любым в интервале от 20,9 до 23,1 $\text{K}\Omega$. Возникает вопрос: как повлияют отклонения параметров всех элементов от номинальных на значение U ?

Можно попытаться оценить пределы изменения U , выбирая для всех элементов «худшие» значения параметров. Однако далеко не всегда известно, какой набор параметров будет «худшим». К тому же, если число элементов велико, то такая оценка окажется сильно завышенной: на самом деле маловероятно, чтобы все параметры одновременно оказались наихудшими.

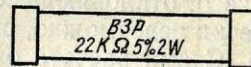


Рис. 17.

когда эта линия освобождается. Обозначим момент освобождения i -й линии через t_i . За начальный момент расчета выберем момент поступления первой заявки $T_1 = 0$. Можно считать, что в этот момент все t_i равны T_1 — все линии свободны. Время окончания расчета равно $T_{\text{кон}} = T_1 + T$.

Первая заявка поступает на линию № 1. Значит, в течение t_3 линия эта будет занята. Поэтому мы должны заменить t_1 на новое значение $(t_1)_{\text{нов}} = T_1 + t_3$, добавить единицу к счетчику выполненных заявок и перейти к рассмотрению второй заявки.

Предположим, что k заявок уже рассмотрены. Тогда надо разыграть момент поступления $k+1$ -й заявки. Для этого выбираем очередное значение γ и по формуле (27) вычисляем очередное значение $\tau = \tau_k$. А затем вычисляем момент поступления

$$T_{k+1} = T_k + \tau_k.$$

Свободна ли в этот момент линия? Для установления этого надо проверить условие

$$t_1 \leq T_{k+1}. \quad (28)$$

Если это условие выполнено, то, значит, к моменту T_{k+1} линия уже освободилась и может обслужить эту заявку. Мы должны заменить t_1 на $T_{k+1} + t_3$, добавить единицу к счетчику выполненных заявок и перейти к следующей заявке. Если условие (28) не выполнено, то это значит, что первая линия в момент T_{k+1} занята. Тогда мы проверяем, свободна ли вторая линия:

$$t_2 \leq T_{k+1}. \quad (29)$$

Если условие (29) выполнено, то мы заменяем t_2 на $T_{k+1} + t_3$, добавляем единицу к счетчику выполненных заявок и переходим к следующей заявке. Если условие (29) не выполнено, то переходим к проверке условия

$$t_3 \leq T_{k+1}.$$

Может оказаться, что при всех i от 1 до n

$$t_i > T_{k+1},$$

т. е. все линии в момент T_{k+1} заняты. Тогда надо добавить единицу к счетчику отказов и потом перейти к рассмотрению следующей заявки.

Каждый раз, вычислив T_{k+1} , надо проверять еще условие окончания опыта

$$T_{k+1} > T_{\text{кон}}.$$

Когда это условие окажется выполненным, опыт заканчивается. В счетчике выполненных заявок и в счетчике отказов будут стоять числа $\mu_{\text{вып}}$ и $\mu_{\text{отк}}$.

Такой опыт повторяется N раз (с использованием различных γ). Результаты всех опытов осредняются:

$$\begin{aligned} M\mu_{\text{вып}} &\approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_{\text{вып}}(j), \\ M\mu_{\text{отк}} &\approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_{\text{отк}}(j), \end{aligned}$$

где $\mu_{\text{вып}}(j)$, $\mu_{\text{отк}}(j)$ — значения $\mu_{\text{вып}}$, $\mu_{\text{отк}}$, полученные в j -м опыте.

На рис. 16 приведена блок-схема программы, осуществляющей такой расчет (в случае необходимости можно получить значения $\mu_{\text{вып}}(j)$, $\mu_{\text{отк}}(j)$ для отдельных испытаний в блоке «конец опыта»).

5.4. Более сложные задачи. Легко показать, что этот же метод позволяет рассчитывать несравненно более сложные системы. Например, величина t_3 может быть не постоянной, а случайной и различной для различных линий (что соответствует различному оборудованию или различной квалификации обслуживающего персонала). Схема расчета останется в основном такой же, но значения t_3 придется каждый раз разыгрывать, и формула разыгрывания для каждой линии будет своя.

Можно рассматривать так называемые системы с ожиданием, в которых отказ выдается не сразу: заявка хранится в течение некоторого времени t_n (время пребывания заявки в системе), и если за это время какая-нибудь линия освободится, то она обслужит эту заявку.

Можно рассматривать системы, в которых очередную заявку принимает та линия, которая раньше всех освободилась. Можно учесть случайный выход из строя отдельных линий и случайное время ремонта каждой из них. Можно учесть изменения плотности потока заявок во времени. И многое, многое другое.

Конечно, расчеты таких систем не даются даром. Чтобы получить результаты, имеющие практическую

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

§ 5. Расчет системы массового обслуживания

5.1. Описание задачи. Рассмотрим одну из самых простых систем массового обслуживания. Система эта состоит из n линий (или каналов, или пунктов обслуживания), каждый из которых может «обслуживать потребителей». В систему поступают заявки, причем моменты их поступления случайные. Каждая заявка поступает на линию № 1. Если в момент поступления k -й заявки (назовем его T_k) эта линия свободна, то она приступает к обслуживанию заявки, что продолжается t_a минут (t_a — время занятости линии). Если в момент T_k линия № 1 занята, то заявка мгновенно передается на линию № 2 и т. д. Наконец, если все n линий в момент T_k заняты, то система выдает отказ. Требуется определить, сколько (в среднем) заявок обслужит система за время T и сколько отказов она даст?

Ясно, что задачи такого типа встречаются при исследовании организации работы любых предприятий, а не только предприятий бытового обслуживания. В некоторых очень частных случаях удается найти аналитические решения. Однако в сложных случаях (о них будет сказано ниже) метод Монте-Карло оказывается единственным методом расчета.

5.2. Простейший поток заявок. Первый вопрос, возникающий при рассмотрении такой системы: что представляет собой поток поступающих заявок? Этот вопрос решается опытом, путем достаточно длительного наблюдения за заявками. Изучение потоков заявок в различных условиях позволило выделить некоторые достаточно часто встречающиеся случаи.

Простейшим потоком (или потоком Пуассона) называется такой поток заявок, когда промежуток времени τ между двумя последовательными заявками есть случайная величина, распределенная в интервале $(0, \infty)$ с плотностью

$$p(x) = ae^{-ax}. \quad (26)$$

Этот закон распределения называют также *экспоненциальным распределением* (рис. 15 — на нем построены плотности (26) при $a = 1, 2$).

Легко вычислить математическое ожидание τ :

$$M\tau = \int_0^{\infty} xp(x) dx = \int_0^{\infty} xae^{-ax} dx.$$

После интегрирования по частям ($u = x, dv = ae^{-ax}dx$) получим

$$M\tau = -xe^{-ax} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

Параметр a называется *плотностью потока заявок*.

Формулу для розыгрыша τ легко получить из уравнения (23), которое в нашем случае запишется так:

$$\int_0^{\tau} ae^{-ax} dx = \gamma.$$

Вычислив интеграл, получим

$$1 - e^{-a\tau} = \gamma,$$

откуда

$$\tau = -\frac{1}{a} \ln(1 - \gamma).$$

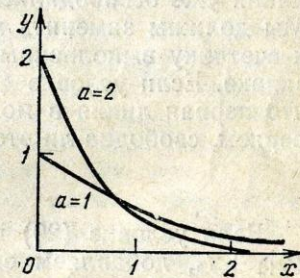


Рис. 15.

Впрочем, величина $1 - \gamma$ распределена точно так же, как γ , и поэтому можно вместо последней формулы использовать формулу

$$\tau = -\frac{1}{a} \ln \gamma. \quad (27)$$

5.3. Схема расчета. Итак, рассмотрим работу системы из п. 5.1 в случае простейшего потока заявок. Каждой линии поставим в соответствие ячейку внутреннего накопителя ЭВМ, в которую будем записывать момент,

Разыгрывать значение ξ можно следующим образом:

1) выбираем два значения γ' и γ'' случайной величины γ и строим случайную точку $\Gamma(\eta', \eta'')$ с координатами

$$\eta' = a \pm \gamma'(b - a), \quad \eta'' = \gamma'' M_0;$$

2) если точка Γ лежит под кривой $y = p(x)$, то полагаем $\xi = \eta'$, если же точка Γ лежит над кривой $y = p(x)$, то пару (γ', γ'') отбрасываем и выбираем новую пару значений (γ', γ'') .

Действительно, так как η' равномерно распределена в (a, b) , то вероятность того, что точка Γ окажется в полосе $(x, x + dx)$, пропорциональна dx . Так как η'' равномерно распределена в $(0, M_0)$, то вероятность того, что эта точка не будет отброшена, равна $p(x)/M_0$ и, стало быть, пропорциональна $p(x)$. Следовательно, вероятность того, что отобранное значение $\xi = \eta'$ окажется в интервале $(x, x + dx)$, пропорциональна $p(x)dx$.

4.4. О разыгрывании нормальных величин. Существует много разнообразных приемов для разыгрывания различных случайных величин (см. § 11). Они используются обычно лишь тогда, когда приемы пп. 4.2, 4.3 оказываются малоэффективными.

В частности, такой случай имеет место для нормальной случайной величины ξ , так как даже в случае, когда $a = 0$, $\sigma = 1$, уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-t^2/2} dt = \gamma$$

в явном виде неразрешимо. И интервал возможных значений ξ бесконечен.

При расчетах вручную можно воспользоваться табл. Б (см. с. 76), где приведены значения (уже разыгранные) случайной величины ξ с математическим ожиданием $M\xi = 0$ и с дисперсией $D\xi = 1$. Необычная формула для разыгрывания этой величины приведена в п. 11.2.

Легко доказать, что случайная величина

$$\xi' = a \pm \sigma\xi \quad (25)$$

будет также нормальной, причем из (10), (11) следует, что

$$M\xi' = a, \quad D\xi' = \sigma^2.$$

Формула (25) позволяет по значениям величины ξ ($M\xi = 0$, $D\xi = 1$) находить значения нормальной случайной величины ξ' с любыми a , σ .

4.5. Снова о примере из п. 1.2. Теперь можно объяснить, как выбирались случайные точки на рис. 1, 2. На рис. 1 построены точки с координатами

$$x = \gamma', \quad y = \gamma''.$$

Значения γ' и γ'' вычислялись по пятеркам цифр из табл. А: $x_1 = 0,86515$, $y_1 = 0,90795$, $x_2 = 0,66155$, $y_2 = 0,66434$ и т. д.

Так как абсциссы и ординаты наших точек независимы и равномерно распределены в $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$, то можно доказать, что вероятность попадания такой точки в любую область, расположенную внутри квадрата $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, равна площади этой области. Иначе говоря, точки равномерно распределены в квадрате.

На рис. 2 построены точки с координатами

$$x = 0,5 + 0,2\xi', \quad y = 0,5 + 0,2\xi'',$$

причем значения ξ' и ξ'' выбирались подряд из табл. Б: $x_1 = 0,5 + 0,2 \cdot 0,2005$, $y_1 = 0,5 + 0,2 \cdot 1,1922$, $x_2 = 0,5 + 0,2 \cdot (-0,0077)$, $y_2 = 0,5 + 0,2 \cdot 0,0348$, ... Одна из точек, оказавшаяся вне квадрата, отброшена.

Из (25) следует, что абсциссы и ординаты наших точек представляют собой нормальные случайные величины со средними $a = 0,5$ и с дисперсиями $\sigma^2 = 0,04$.

Оценим теперь погрешность расчета, выполненного в п. 1.2. Величину N' можно считать приближенно нормальной, ибо

$$N' = \sum_{j=1}^N \xi_j,$$

где $\xi_j = 1$, если j -я точка оказалась внутри S , и $\xi_j = 0$ в противном случае. Обозначив площадь фигуры S той же буквой S , можем записать распределение, общее для всех величин ξ_j :

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 - S \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $M\xi = S$, $M\xi^2 = S$, $D\xi = S - S^2$. Дисперсия величины N'/N равна

$$D(N'/N) = D\xi/N = S(1 - S)/N,$$

а вероятная ошибка приближенно равна $0,6745 \sqrt{S(1 - S)/N}$. При $S = 0,35$, $N = 40$ получаем значение $0,051$, которое практически совпадает с погрешностью эксперимента, описанного в п. 1.2.

4.2. Разыгрывание непрерывной случайной величины.
 Допустим теперь, что нам нужно получать значения случайной величины ξ , распределенной в интервале (a, b) с плотностью $p(x)$. Докажем, что значения ξ можно находить из уравнения

$$\int_a^{\xi} p(x) dx = \gamma, \quad (23)$$

т. е., выбрав очередное значение γ , надо решить уравнение (23) и найти очередное значение ξ .

Для доказательства рассмотрим функцию

$$y = \int_a^x p(x) dx.$$

Из общих свойств плотности (15), (16) следует, что

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 1, \\ y'(x) = p(x) > 0.$$

Значит, функция $y(x)$ монотонно возрастает от 0 до 1 (рис. 12). И любая прямая $y = \gamma$, где $0 < \gamma < 1$, пересекает график $y = y(x)$ в одной единственной точке, абсциссу которой мы и принимаем за ξ . Таким образом, уравнение (23) всегда имеет одно и только одно решение.

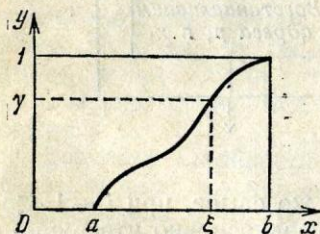


Рис. 12.

Выберем теперь произвольный интервал (a', b') , содержащийся внутри (a, b) . Точкам этого интервала

$$a' < x < b'$$

отвечают ординаты кривой $y = y(x)$, удовлетворяющие неравенству

$$y(a') < y < y(b').$$

Поэтому, если ξ принадлежит интервалу $a' < x < b'$, то γ принадлежит интервалу $y(a') < y < y(b')$, и наоборот (рис. 13). Значит,

$$P\{a' < \xi < b'\} = P\{y(a') < \gamma < y(b')\}.$$

Так как γ равномерно распределена в $(0, 1)$, то

$$P\{y(a') < \gamma < y(b')\} = y(b') - y(a') = \int_{a'}^{b'} p(x) dx.$$

Итак,

$$P\{a' < \xi < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x) dx,$$

а это как раз и означает, что случайная величина ξ , являющаяся корнем уравнения (23), имеет плотность вероятностей $p(x)$.

Пример. Случайная величина η называется *равномерно распределенной в интервале (a, b)* , если ее плотность постоянна в этом интервале:

$$p(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b.$$

Чтобы разыгрывать значения η , составим уравнение (23):

$$\int_a^{\eta} \frac{dx}{b-a} = \gamma.$$

Интеграл легко вычисляется:

$$\frac{\eta - a}{b - a} = \gamma.$$

Отсюда получается явное выражение для η :

$$\eta = a + \gamma(b - a). \quad (24)$$

Другие примеры применения формулы (23) приведены в пп. 5.2, 9.3.

4.3. Метод Неймана для разыгрывания непрерывной случайной величины. Может оказаться, что разрешить уравнение (23) относительно ξ трудно, например в случаях, когда интеграл от $p(x)$ не выражается через элементарные функции или когда плотность $p(x)$ задана графически.

Предположим, что случайная величина ξ определена на конечном интервале (a, b) и плотность ее ограничена (рис. 14):

$$p(x) \leq M_0.$$

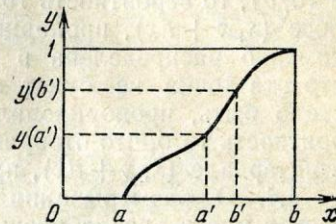


Рис. 13.

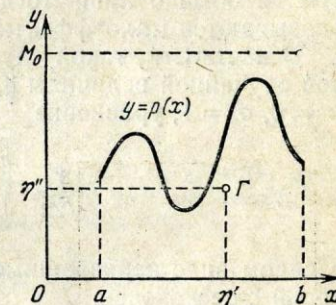


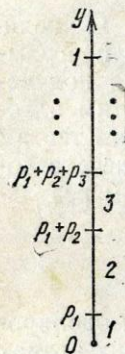
Рис. 14.

Однако это оказалось совершенно ненужным: значения любой случайной величины можно получить путем преобразования значений одной какой-либо (так сказать «стандартной») случайной величины. Обычно роль такой величины играет случайная величина γ , равномерно распределенная в $(0, 1)$. Как получать значения γ , мы уже знаем.

Условимся процесс нахождения значения какой-либо случайной величины ξ путем преобразования одного или нескольких значений γ называть *разыгрыванием* случайной величины ξ .

4.1. Разыгрывание дискретной случайной величины. Допустим, что нам нужно получать значения случайной величины ξ с распределением

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$



Рассмотрим интервал $0 < y < 1$ и разобьем его на n интервалов, длины которых равны p_1, p_2, \dots, p_n . Координатами точек деления, очевидно, будут $y = p_1, y = p_1 + p_2, y = p_1 + p_2 + p_3, \dots, y = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$.

Полученные интервалы занумеруем числами $1, 2, \dots, n$ (рис. 10). На этом приготовлении к розыгрышу ξ заканчиваются. Каждый раз, когда нам надо будет «поставить опыт» и разыграть значение ξ , мы будем выбирать значение γ и строить точку $y = \gamma$. Если эта точка попадет в интервал с номером i , то будем считать, что $\xi = x_i$ (в этом опыте).

Доказать законность такой процедуры совсем легко. В самом деле, так как случайная величина γ равномерно распределена в $(0, 1)$, то вероятность того, что γ окажется в некотором интервале, равна длине интервала: $P\{0 < \gamma < p_1\} = p_1, P\{p_1 < \gamma < p_1 + p_2\} = p_2, \dots$. Согласно нашей процедуре $\xi = x_i$ тогда, когда

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} < \gamma < p_1 + p_2 + \dots + p_i,$$

а длина этого интервала равна p_i .

Конечно, на ЭВМ можно обойтись без рис. 10. Надо только расположить числа x_1, x_2, \dots, x_n в ячейках накопителя подряд и вероятности $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots$ — тоже подряд. Блок-схема подпрограммы для розыгрыша ξ приведена на рис. 11.

Заметим, что порядок нумерации значений x_1, x_2, \dots, x_n в распределении ξ может быть произвольным, однако он должен быть фиксирован до начала розыгрыша.

Если все значения ξ равновероятны:

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix},$$

то алгоритм разыгрывания можно упростить. Дело в том, что, согласно нашей процедуре, $\xi = x_i$ тогда, когда

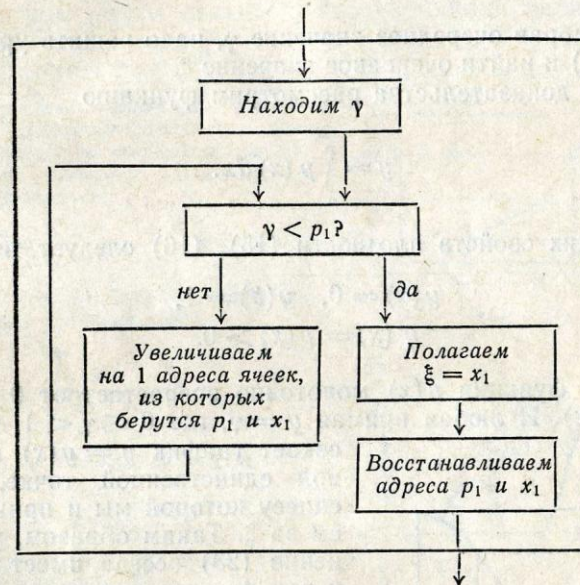


Рис. 11.

$(i-1)/n < \gamma < i/n$, или, что то же самое, при $i-1 < \lfloor n\gamma \rfloor < i$. Последнее неравенство равносильно утверждению о том, что целая часть $n\gamma$ равна $i-1$.

Обозначив через $[z]$ целую часть числа z , получим следующую формулу для разыгрывания равновероятных значений:

$$\xi = x_i, \quad i = 1 + [n\gamma].$$

Пример. Разыграть 10 значений случайной величины ξ , рассмотренной в п. 2.1, для которой $x_i = i (1 \leq i \leq 6)$. В качестве значений γ выберем тройки цифр из табл. А, умноженные на 0,001. Итак, $\gamma = 0,865; 0,159; 0,079; 0,566; 0,155; 0,664; 0,345; 0,655; 0,812; 0,332$. Соответствующие значения $x_i = 1 + [6\gamma]$ равны 6; 1; 1; 4; 1; 4; 3; 4; 5; 2. Этот опыт равносильен десяти бросаниям игральной кости.

просто неэкономично. Лучше использовать так называемые псевдослучайные числа.

3.3. Псевдослучайные числа. Поскольку «качество» используемых случайных чисел проверяется с помощью специальных тестов, можно не интересоваться тем, как эти числа получены — лишь бы они удовлетворяли принятой системе тестов. Можно даже попытаться вычислять их по заданной формуле. Но, конечно, это должна быть весьма хитрая формула.

Числа, получаемые по какой-либо формуле и имитирующие значения случайной величины γ , называются *псевдослучайными числами*. Под словом «имитирующие» подразумевается, что эти числа удовлетворяют ряду тестов так, как если бы они были значениями этой случайной величины.

Первый алгоритм для получения псевдослучайных чисел был предложен Дж. Нейманом. Он называется *методом середины квадратов*. Поясним его на примере.

Пусть задано 4-значное число $\gamma_0 = 0,9876$. Возведем его в квадрат. Получим 8-значное число ($\gamma_0^2 = 0,97535376$). Выберем четыре средние цифры этого числа и положим $\gamma_1 = 0,5353$. Затем возведем γ_1 в квадрат ($\gamma_1^2 = 0,28654609$) и снова извлечем четыре средние цифры. Получим $\gamma_2 = 0,6546$. Далее, $\gamma_2^2 = 0,42850116$, $\gamma_3 = 0,8501$; $\gamma_3^2 = 0,72267001$, $\gamma_4 = 0,2670$; $\gamma_4^2 = 0,07128900$, $\gamma_5 = 0,1289$ и т. д.

Но этот алгоритм не оправдал себя: получалось больше чем нужно малых значений. Поэтому разными исследователями были разработаны другие алгоритмы. Наибольшее распространение получил алгоритм, называемый методом сравнений (см. § 10).

Достоинства метода псевдослучайных чисел довольно очевидны. Во-первых, на получение каждого числа затрачивается всего несколько простых операций, так что скорость генерирования случайных чисел имеет тот же порядок, что и скорость работы ЭВМ. Во-вторых, программа занимает всего несколько ячеек накопителя. В-третьих, любое из чисел γ_k может быть легко воспроизведено. В-четвертых, нужно лишь один раз проверить «качество» такой последовательности, затем ее можно много раз безбоязненно использовать при расчете однотипных задач.

Единственный недостаток метода — ограниченность количества псевдослучайных чисел, ибо если последо-

вательность чисел $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \dots$ вычисляется на ЭВМ по формуле вида

$$\gamma_{k+1} = F(\gamma_k),$$

то эта последовательность обязательно периодическая*). Впрочем, для наиболее распространенных псевдослучайных чисел период столь велик, что превосходит любые практические потребности. Подавляющее большинство расчетов по методу Монте-Карло осуществляется с использованием псевдослучайных чисел.

3.4. Замечание. Необходимо предостеречь вычислителей: встречаются статьи, книги, стандартные программы, в которых указаны плохие алгоритмы для получения псевдослучайных чисел. Получаемые по этим алгоритмам числа удовлетворяют только простейшим тестам (см. п. 3.1). Использование таких чисел для расчета достаточно сложных задач приводит к ошибочным результатам (см. п. 10.3).

§ 4. Преобразования случайных величин

При решении различных задач приходится моделировать различные случайные величины. На ранних этапах

использования метода Монте-Карло некоторые вычислители пытались для нахождения каждой случайной величины строить свою рулетку. Например, чтобы находить значения случайной величины с распределением

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0,5 & 0,25 & 0,125 & 0,125 \end{pmatrix}, \quad (22')$$

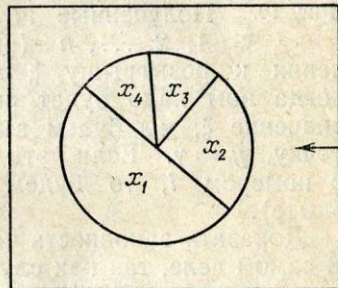


Рис. 9.

можно использовать рулетку, изображенную на рис. 9, действующую точно так же, как рулетка, изображенная на рис. 7, но с неравномерными делениями, пропорциональными p_i .

*) В самом деле, в коде ЭВМ можно записать лишь конечное число различных чисел. Следовательно, раньше или позже одно из чисел, например γ_L , совпадет с одним из предыдущих чисел, например γ_i . Тогда из формулы вытекает, что $\gamma_{L+1} = \gamma_{i+1}$, $\gamma_{L+2} = \gamma_{i+2}$, ..., т. е. в последовательности имеется период длины $P = L - i$. «Запас» псевдослучайных чисел обычно характеризуется величиной L , которую называют *длиной отрезка аперодичности*.

Пусть число нулей в этой таблице равно v_0 , число единиц v_1 , число двоек v_2 и т. д. Вычислим сумму

$$\sum_{i=0}^9 \left(v_i - \frac{1}{10} N \right)^2.$$

Теория вероятностей позволяет предсказать, в каких пределах может лежать эта сумма: она не должна быть слишком большой, так как математическое ожидание каждого из v_i равно $N/10$, но не должна быть и слишком малой, так как это означало бы «слишком закономерное» распределение значений. (Любопытно, что такие «слишком равномерно распределенные» значения позволяют быстрее решать некоторые задачи частного вида. Но в качестве универсальных случайных чисел они не годятся.)

Предположим теперь, что таблица содержит четное число $N = 2N'$ цифр, и рассмотрим пары цифр $(e_1, e_2), (e_3, e_4), \dots, (e_{N-1}, e_N)$, всего N' пар. Обозначим через v_{ij} количество пар (i, j) в этом ряду. Сосчитав все v_{ij} , вычислим сумму

$$\sum_{i,j=0}^9 \left(v_{ij} - \frac{1}{100} N' \right)^2.$$

И снова теория вероятностей позволяет предсказать, в каких пределах должна находиться эта сумма.

Таблицы случайных чисел используются только при расчетах по методу Монте-Карло вручную. Дело в том, что все ЭВМ обладают сравнительно малой внутренней памятью и большая таблица туда не помещается. Хранение же таблицы во внешней памяти и постоянное обращение к ней за числами очень замедляет счет. Однако не исключено, что со временем возможности памяти у ЭВМ резко вырастут, и тогда таблицы случайных чисел станут весьма практичными.

3.2. Генераторы случайных чисел. Казалось бы, что упоминавшаяся в п. 3.1 рулетку можно присоединить к ЭВМ и по мере надобности вырабатывать случайные числа. Однако любой механический прибор будет слишком медленным для ЭВМ. Поэтому в качестве генераторов случайных чисел чаще всего используют шумы в электронных лампах (рис. 8): если за некоторый фиксированный промежуток времени Δt уровень шума превысил заданный порог четное число раз, то записывается нуль, а если нечетное число раз, то записывается единица *).

На первый взгляд это очень удобный способ. Пусть m таких генераторов работают параллельно, работают

*) Существуют и более совершенные конструкции.

все время и засылают случайные нули и единицы во все двоичные разряды специальной ячейки. Каждый такт — одно m -разрядное число. В любой момент счета можно обратиться к этой ячейке и взять оттуда значение случайной величины γ , равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$. Конечно, это значение приближенное, записанное в форме m -разрядной двоичной дроби

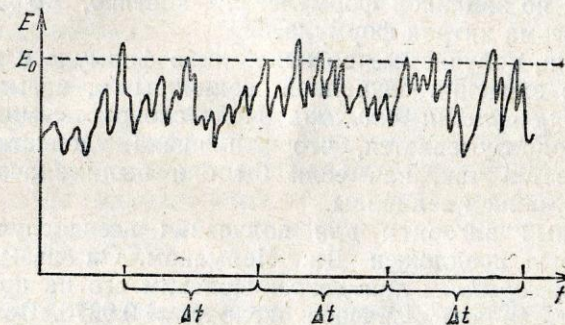


Рис. 8.

$0, \alpha_{(1)}\alpha_{(2)} \dots \alpha_{(m)}$, где каждая из величин $\alpha_{(i)}$ имитирует случайную величину с распределением

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Однако и этот метод не свободен от недостатков. Во-первых, трудно проверить «качество» вырабатываемых чисел. Проверки приходится делать периодически, так как из-за каких-либо неисправностей может возникнуть так называемый дрейф распределения (т. е. нули и единицы в каком-либо из разрядов станут появляться не одинаково часто). Во-вторых, обычно все расчеты на ЭВМ проводят дважды, чтобы исключить возможность случайного сбоя. Но воспроизвести те же случайные числа невозможно, если их по ходу счета не запоминать. А если их запоминать, то мы снова приходим к случаю таблиц.

Датчики такого типа, несомненно, окажутся полезными тогда, когда будут производиться специализированные ЭВМ для решения задач методом Монте-Карло. А для универсальных ЭВМ, на которых расчеты с помощью случайных чисел проводятся лишь изредка, содержать и эксплуатировать специальное устройство

арифметическое этих значений будет приближенно равно m . С большой вероятностью погрешность такого приближения не превосходит величины $3b/\sqrt{N}$. Очевидно, эта погрешность стремится к нулю с ростом N .

На практике очень часто предпочитают ориентироваться не на оценку сверху $3b/\sqrt{N}$, а на вероятную ошибку, которая приближенно равна $r_N = 0,6745b/\sqrt{N}$. Именно таков обычно порядок фактической погрешности расчета, которая равна

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j - m \right|.$$

§ 3. Получение случайных величин на ЭВМ

Сама постановка вопроса «получение случайных величин на ЭВМ» иногда вызывает недоумение: ведь все, что делает машина, должно быть заранее запрограммировано: откуда же может появиться случайность? В этом вопросе и в самом деле есть некоторые трудности, но они относятся скорее к философии, так что мы на них останавливаться не будем.

На всякий случай заметим только, что случайные величины, о которых шла речь в § 2, — это идеальные математические понятия. Вопрос о том, можно ли с их помощью описать какое-либо явление природы, решается опытом. Такое описание всегда является приближенным. Более того, случайная величина, которая вполне удовлетворительно описывает какую-то физическую величину в одном круге явлений, может оказаться плохой характеристикой этой же величины при исследовании других явлений.

Точно так же дорога, которую на карте страны можно считать прямой (идеальной математической прямой «без ширины»), становится полосой с изгибами на крупномасштабном плане населенного пункта...

Обычно различают три способа получения случайных величин: таблицы случайных чисел, генераторы случайных чисел и метод псевдослучайных чисел.

3.1. Таблицы случайных чисел. Прделаем следующий опыт. Напишем на десяти одинаковых бумажках цифры 0, 1, 2, ..., 9. Положим эти бумажки в шапку, перемешаем и будем извлекать оттуда по одной бумажке, каждый раз возвращая ее назад и снова перемешивая

все бумажки. Полученные таким образом цифры запишем в виде таблицы, подобной табл. А на с. 76 (цифры для удобства объединены в группы по 5 штук).

Такая таблица называется *таблицей случайных чисел*, хотя правильнее было бы назвать ее таблицей случайных цифр. Можно ввести ее в запоминающее устройство ЭВМ. И в ходе расчета, когда нам понадобится значение случайной величины с распределением

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 9 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & \dots & 0,1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

мы будем брать очередную цифру из этой таблицы.

Самая большая из опубликованных таблиц случайных чисел содержит 1 000 000 цифр*). Конечно, она составлялась с помощью более современной техники, чем шапка: была сконструирована специальная рулетка с использованием электроники. Простейшая схема такой рулетки приведена на рис. 7 (вращающийся диск резко останавливается, и выбирается та цифра, на которую указывает неподвижная стрелка).

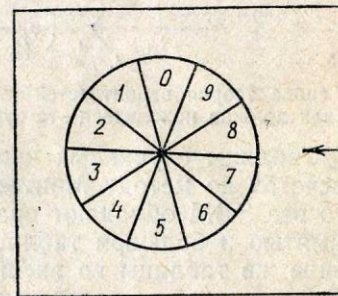


Рис. 7.

Необходимо заметить, что составить хорошую таблицу случайных чисел не так просто, как может показаться. Любой реальный физический прибор вырабатывает случайные величины с распределением, несколько отличающимся от идеального распределения (22). К тому же в ходе опыта возможны ошибки (например, одна из бумажек на некоторое время может пристать к подкладке). Поэтому составленные таблицы тщательно проверяются с помощью специальных статистических тестов: не противоречат ли те или иные свойства группы чисел гипотезе о том, что эти числа — значения случайной величины (22).

Приведем примеры простейших и в то же время важнейших тестов. Рассмотрим таблицу $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$, содержащую N цифр.

*) RAND Corporation. A million random digits with 100 000 normal deviates. — Glencoe: The Free Press, 1955.

Обычно считают, что при единичном измерении абсолютная величина погрешности $|\delta|$ не превосходит 3σ . А вероятная ошибка $r = 0,6745\sigma$ служит характеристикой порядка величины $|\delta|$, которая, конечно же, может оказаться как больше, так и меньше, чем r

$$P\{|\delta| < r\} = P\{|\delta| > r\} = 0,5.$$

2.4. Центральная предельная теорема теории вероятностей. Эта замечательная теорема была впервые сформулирована П. Лапласом. Обобщением этой теоремы занимались многие выдающиеся математики, в том числе П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов. Доказательство ее достаточно сложно.

Рассмотрим N одинаковых независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, так что распределения вероятностей этих величин совпадают. Следовательно, их математические ожидания и дисперсии также совпадают (предполагается, что они конечны). Величины эти могут быть как непрерывными, так и дискретными.

Обозначим

$$M\xi_1 = M\xi_2 = \dots = M\xi_n = m,$$

$$D\xi_1 = D\xi_2 = \dots = D\xi_N = b^2.$$

Сумму всех этих величин обозначим через

$$\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N.$$

Из формул (6), (13) следует, что

$$M\rho_N = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N) = Nm,$$

$$D\rho_N = D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N) = Nb^2.$$

Рассмотрим теперь нормальную случайную величину ζ_N с такими же параметрами: $a = Nm$, $\sigma = b\sqrt{N}$.

В центральной предельной теореме утверждается, что для любого интервала (a', b') при больших N

$$P\{a' < \rho_N < b'\} \approx \int_{a'}^{b'} p_{\zeta_N}(x) dx.$$

Физический смысл этой теоремы очевиден: сумма ρ_N большого числа одинаковых случайных величин приближенно нормальна. На самом деле эта теорема справедлива при гораздо более широких условиях: все слагаемые не обязаны быть одинаковыми и независимыми; существенно только, чтобы отдельные слагаемые не играли слишком большой роли в сумме.

Именно эта теорема объясняет, почему нормальные случайные величины так часто встречаются в природе. В самом деле, каждый раз, когда мы сталкиваемся с суммарным воздействием большого числа незначительных случайных факторов, результирующая случайная величина оказывается нормальной.

Например, отклонение артиллерийского снаряда от цели почти всегда оказывается нормальной случайной величиной, так как оно зависит и от метеорологических условий на разных участках траекторий, и от многих других факторов.

2.5. Общая схема метода Монте-Карло. Допустим, что нам требуется вычислить какую-то неизвестную величину m . Попробуем придумать такую случайную величину ξ , чтобы $M\xi = m$. Пусть при этом $D\xi = b^2$.

Рассмотрим N независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, распределения которых совпадают с распределением ξ . Если N достаточно велико, то, согласно центральной предельной теореме, распределение суммы $\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$ будет приблизительно нормальным с параметрами $a = Nm$, $\sigma = b\sqrt{N}$. Из (20) следует, что

$$P\{Nm - 3b\sqrt{N} \leq \rho_N \leq Nm + 3b\sqrt{N}\} \approx 0,997.$$

Если мы разделим выражение, стоящее в фигурной скобке, на N , то получим эквивалентное неравенство, и вероятность его останется такой же:

$$P\{m - 3b/\sqrt{N} \leq \rho_N/N \leq m + 3b/\sqrt{N}\} \approx 0,997.$$

Последнее соотношение перепишем в несколько ином виде:

$$P\left\{\left|\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j - m\right| < \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0,997. \quad (21)$$

Это — чрезвычайно важное для метода Монте-Карло соотношение. Оно дает нам и метод расчета m , и оценку погрешности.

В самом деле, найдем N значений случайной величины ξ (все равно, находить ли один раз по одному значению каждой из величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ или найти N значений величины ξ , так как все эти случайные величины имеют одно и то же распределение и предполагаются независимыми). Из (21) видно, что среднее

В самом деле, легко видеть, что

$$\max p(x) = p(a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}.$$

Если уменьшать σ , то $\max p(x)$ будет возрастать. Но вся площадь под кривой $y = p(x)$ по условию (16) равна 1. Поэтому кривая будет вытягиваться вверх в окрестности

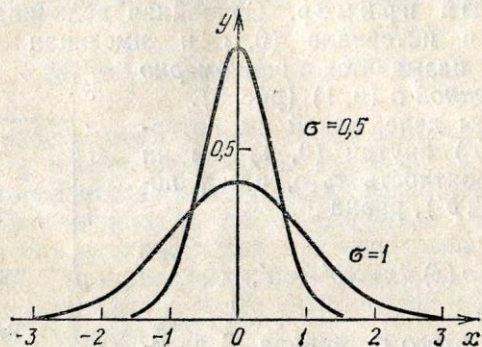


Рис. 6.

$x = a$, но убывать при всех достаточно больших значениях x . На рис. 6 построены две нормальные плотности, соответствующие $a = 0$, $\sigma = 1$ и $a = 0$, $\sigma = 0,5$. (Еще одна нормальная плотность построена на рис. 21).

Можно доказать, что

$$M\zeta = a, \quad D\zeta = \sigma^2.$$

Любые вероятности вида $P\{x' < \zeta < x''\}$ легко вычисляются с помощью таблицы, в которой приведены значения функции

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt,$$

называемой обычно *интегралом вероятностей* *). В самом деле, согласно (14)

$$P\{x' < \zeta < x''\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

*) Некоторые авторы называют интегралами вероятностей другие функции, отличные от $\Phi(x)$. Однако во всех случаях эти функции путем несложных преобразований выражаются через $\Phi(x)$.

В интеграле сделаем замену переменной $x - a = \sigma t$. Тогда получим

$$P\{x' < \zeta < x''\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt,$$

где $t_1 = (x' - a)/\sigma$, $t_2 = (x'' - a)/\sigma$. Отсюда следует, что

$$P\{x' < \zeta < x''\} = 0,5[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)].$$

Заметим также, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Нормальные случайные величины очень часто встречаются при исследовании самых различных по своей природе вопросов. О причине этого будет сказано в следующем пункте.

Правило «трех сигм». Выбрав $x' = a - 3\sigma$, $x'' = a + 3\sigma$, найдем $t_1 = -3$, $t_2 = 3$. Следовательно,

$$P\{a - 3\sigma < \zeta < a + 3\sigma\} = \Phi(3) = 0,997. \quad (20)$$

Вероятность 0,997 настолько близка к 1, что иногда последнюю формулу интерпретируют так: *при одном испытании практически невозможно получить значение ζ , отличающееся от $M\zeta$ больше чем на 3σ* .

Вероятная ошибка. Рассмотрим величину $r = 0,6745\sigma$ и выберем $x' = a - r$, $x'' = a + r$. Тогда $t_1 = -0,6745$, $t_2 = 0,6745$ и

$$P\{a - r < \zeta < a + r\} = \Phi(0,6745) = 0,500.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$P\{|\zeta - a| < r\} = 0,5.$$

Ясно, что вероятность противоположного неравенства также равна 0,5:

$$P\{|\zeta - a| > r\} = 0,5$$

($P\{|\zeta - a| = r\} = 0$, ибо случайная величина ζ — величина непрерывная).

Последние формулы показывают, что отклонение ζ от a , большее чем r , и отклонение, меньшее чем r , одинаково вероятны. Поэтому величину r называют *вероятной ошибкой*.

Пример. Погрешность измерения δ очень часто оказывается нормальной случайной величиной. Если систематической погрешности измерения нет, то $a = M\delta = 0$. А величина $\sigma = \sqrt{D\delta}$, называемая *средней квадратической погрешностью*, всегда положительна и характеризует точность самого метода измерения.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется число

$$M\xi = \int_a^b xp(x) dx. \quad (17)$$

Смысл этой характеристики такой же, как в случае дискретной случайной величины. В самом деле, так как

$$M\xi = \int_a^b xp(x) dx \left(\int_a^b p(x) dx \right)^{-1},$$

то легко видеть, что это есть среднее значение ξ : ведь значением ξ может быть любое число x из интервала (a, b) , которое входит в интеграл с весом $p(x)$.*

Все изложенное в п. 2.1 от формулы (4) до формулы (13) справедливо также для непрерывных случайных величин: и определение дисперсии (7), и формула (9) для ее вычисления, и все свойства $M\xi$ и $D\xi$. Повторять мы их не будем**).

Укажем только еще одну формулу для математического ожидания функции от ξ . Пусть по-прежнему случайная величина ξ имеет плотность вероятностей $p(x)$. Выберем произвольную непрерывную функцию $f(x)$ и рассмотрим случайную величину $\eta = f(\xi)$. Можно доказать, что

$$Mf(\xi) = \int_a^b f(x) p(x) dx. \quad (18)$$

Впрочем, аналогичная формула имеет место и для дискретной случайной величины ξ с распределением (Т):

$$Mf(\xi) = \sum_{i=1}^n f(x_i) p_i.$$

Подчеркнем, что, вообще говоря, $Mf(\xi) \neq f(M\xi)$.

*) И в этом случае можно указать на аналогичную формулу из механики: если линейная плотность стержня $a \leq x \leq b$ равна $p(x)$, то абсцисса центра тяжести стержня вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \int_a^b xp(x) dx \left(\int_a^b p(x) dx \right)^{-1}.$$

**) В теории вероятностей рассматриваются также более общие непрерывные случайные величины, у которых $p(x) \geq 0$. Встречаются случайные величины, для которых $M\xi$ не существует. Возможен случай $D\xi = \infty$.

Наконец, отметим, что для любой непрерывной случайной величины ξ при каждом x имеем $P\{\xi = x\} = 0$. Физический смысл имеет не вероятность попадания ξ в заданную точку x , а вероятность попадания в сколь угодно малый интервал:

$$P\{x \leq \xi < x + dx\} = p(x) dx.$$

Важный пример. Случайная величина γ , определенная в интервале $(0, 1)$ и имеющая плотность $p(x) = 1$, называется *равномерно распределенной в $(0, 1)$* (рис. 5).

В самом деле, какой бы интервал (a', b') внутри $(0, 1)$ мы ни взяли, вероятность того, что γ попадет в (a', b') , равна

$$\int_{a'}^{b'} p(x) dx = b' - a',$$

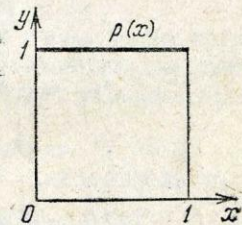


Рис. 5.

т. е. длине этого интервала. В частности, если мы разделим интервал $(0, 1)$ на любое число интервалов равной длины, то вероятность попадания γ в любой из них будет одна и та же.

Легко вычислить, что

$$M\gamma = \int_0^1 xp(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$D\gamma = \int_0^1 x^2 p(x) dx - (M\gamma)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Со случайной величиной γ мы еще не раз встретимся в дальнейшем.

2.3. Нормальные случайные величины. *Нормальной (или гауссовской)* случайной величиной называется случайная величина ξ , определенная на всей оси $(-\infty, \infty)$ и имеющая плотность

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (19)$$

где a и $\sigma > 0$ — числовые параметры.

Параметр a не влияет на форму кривой $y = p(x)$: изменение его приводит лишь к сдвигу кривой вдоль оси x . Однако при изменении σ форма кривой меняется.

это — довольно сложное понятие, но в простейших случаях оно очевидно *).

Для независимых случайных величин ξ и η справедливы следующие соотношения:

$$M\xi\eta = M\xi M\eta, \quad (12)$$

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta. \quad (13)$$

Пример. Рассмотрим случайную величину x с распределением

$$x \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{array} \right).$$

Очевидно, реализацией этой величины можно считать число очков, выпадающих на игральной кости: любое значение одинаково вероятно. Вычислим математическое ожидание x по формуле (3):

$$Mx = 1 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5;$$

дисперсию x по формуле (9):

$$Dx = Mx^2 - (Mx)^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - (3,5)^2 = 2,917.$$

Пример. Рассмотрим случайную величину θ с распределением

$$\theta \sim \left(\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{array} \right).$$

Реализацией этой величины можно считать игру в орлянку с условием, что, например, орел — это 3 очка, а решетка — 4 очка. В этом случае

$$M\theta = 0,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 4 = 3,5;$$

$$D\theta = 0,5(3^2 + 4^2) - (3,5)^2 = 0,25.$$

Мы видим, что $M\theta = Mx$, но $D\theta < Dx$. Последнее можно было легко предвидеть, так как значения θ могут отличаться от 3,5 только на $\pm 0,5$, в то время как в значениях x разброс может достигать $\pm 2,5$.

2.2. Непрерывные случайные величины. Предположим, что на плоскости в начале координат расположено некоторое количество радия. При распаде каждого атома радия из него вылетает α -частица. Направление ее будем характеризовать углом ψ (рис. 3). Так как и теоретически, и практически возможны любые направления вылета, то эта случайная величина может принимать любое значение от 0 до 2π .

*) Допустим, что, кроме случайной величины ξ , мы наблюдаем еще за случайной величиной η . Если распределение величины ξ не меняется от того, что нам уже известно значение, которое приняла величина η , то естественно считать, что ξ от η не зависит.

Мы будем называть случайную величину ξ *непрерывной*, если она может принимать любое значение из некоторого интервала (a, b) .

Непрерывная случайная величина ξ определяется заданием интервала (a, b) , содержащего возможные значения этой величины, и функции $p(x)$, которая называется *плотностью вероятностей* случайной величины ξ (или *плотностью распределения* ξ).

Физический смысл $p(x)$ следующий: пусть (a', b') — произвольный интервал, содержащийся в (a, b) (т. е.

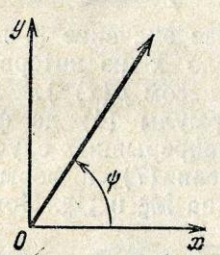


Рис. 3.

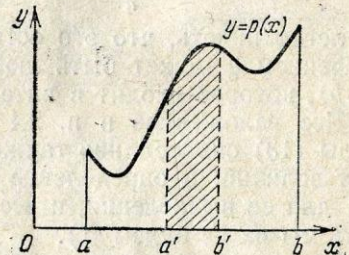


Рис. 4.

$a \leq a' < b' \leq b$). Тогда вероятность того, что ξ окажется в интервале (a', b') , равна интегралу

$$P\{a' < \xi < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x) dx. \quad (14)$$

На рис. 4 заштрихованная площадь равна значению этого интеграла.

Множество значений ξ может быть любым интервалом. Возможен даже случай $a = -\infty$, а также $b = \infty$. Однако плотность $p(x)$ должна удовлетворять двум условиям, аналогичным (1), (2) для дискретных величин:

1) плотность $p(x)$ положительна:

$$p(x) > 0; \quad (15)$$

2) интеграл от плотности $p(x)$ по всему интервалу (a, b) равен 1:

$$\int_a^b p(x) dx = 1. \quad (16)$$

✓ Дискретная случайная величина ξ определяется таблицей

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad (T)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — возможные значения величины ξ , а p_1, p_2, \dots, p_n — соответствующие им вероятности. Точнее говоря, вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_i (обозначим ее через $P\{\xi = x_i\}$), равна p_i :

$$P\{\xi = x_i\} = p_i.$$

Таблица (Т) называется *распределением случайной величины*.

Числа x_1, x_2, \dots, x_n могут быть, вообще говоря, любыми. Однако вероятности p_1, p_2, \dots, p_n должны удовлетворять двум условиям:

1) все p_i положительны:

$$p_i > 0; \quad (1)$$

2) сумма всех p_i равна 1:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (2)$$

(это условие означает, что ξ обязана в каждом случае принять одно из значений x_1, x_2, \dots, x_n).

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (3)$$

Чтобы выяснить физический смысл этой величины, запишем ее в следующем виде:

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^{-1}.$$

Отсюда видно, что $M\xi$ — это *среднее значение* величины ξ , причем более вероятные значения x_i входят в сумму с большими весами*).

*) Осреднение с весами очень часто встречается в самых различных областях науки. Например, в механике: если в точках x_1, x_2, \dots, x_n (на оси Ox) расположены массы m_1, m_2, \dots, m_n , то абсцисса центра тяжести этой системы вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i m_i \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^{-1}.$$

Конечно, в этом случае сумма всех масс не обязана равняться единице.

✓ Отметим основные свойства математического ожидания. Если c — какая-нибудь не случайная величина, то

$$M(\xi + c) = M\xi + c, \quad (4)$$

$$Mc\xi = cM\xi. \quad (5)$$

Если ξ, η — любые случайные величины, то

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta. \quad (6)$$

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (7)$$

Следовательно, дисперсия $D\xi$ — это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины ξ от ее среднего значения $M\xi$. Очевидно, всегда $D\xi > 0$.

Математическое ожидание и дисперсия — важнейшие числовые характеристики случайной величины ξ . Каково их практическое значение?

Если мы будем наблюдать величину ξ много раз и получим значения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ (каждое из которых будет равно одному из чисел x_1, x_2, \dots, x_n), то среднее арифметическое от этих значений будет близко к $M\xi$:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N}{N} \approx M\xi. \quad (8)$$

Дисперсия $D\xi$ характеризует разброс этих значений около среднего $M\xi$.

Формулу (7) для дисперсии можно преобразовать с помощью формул (4) — (6):

$$D\xi = M[\xi^2 - 2M\xi \cdot \xi + (M\xi)^2] = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2,$$

откуда

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \quad (9)$$

Вычислять дисперсию по этой формуле обычно проще, чем по формуле (7).

Отметим основные свойства дисперсии. Если c — какая-нибудь не случайная величина, то

$$D(\xi + c) = D\xi, \quad (10)$$

$$Dc\xi = c^2 D\xi. \quad (11)$$

Важную роль в теории вероятностей играет понятие *независимости случайных величин*. В действительности

точно в центр: они пробьют на мишени N случайных точек *). Можно ли по этим точкам оценить площадь S ?

Результат такого опыта изображен на рис. 2. В этом опыте $N = 40$, $N' = 24$ и $N'/N = 0,60$, что превышает истинное значение площади (0,35) почти в 2 раза. Впрочем, и так ясно, что при очень высокой квалификации

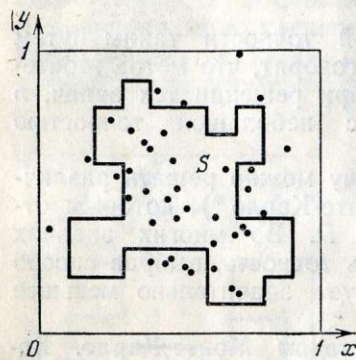


Рис. 2.

стрелка результат опыта будет очень плохим, так как почти все пули будут ложиться вблизи центра и попадут в S^{**}). Нетрудно понять, что наш метод вычисления площади будет справедлив только тогда, когда случайные точки будут не «просто случайными», а еще и «равномерно разбросанными» по всему квадрату. Чтобы придать этим словам точный смысл, необходимо познакомиться с определением случайных величин и некоторыми их свойствами. Эти сведения изложены в § 2 без доказательств. Читатель, знакомый с любым курсом теории вероятностей, может пропустить весь § 2, кроме п. 2.5.

*) Мы предполагаем, что стрелок не является чемпионом мира и удален на достаточно большое расстояние от мишени.

**) О том, как выбирались случайные точки на рис. 1, 2, будет сказано в п. 4.5.

ГЛАВА 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 2. Случайные величины

Мы считаем, что понятие *вероятность* читателю более или менее известно, и переходим прямо к понятию *случайная величина*.

Слова «случайная величина» в обыденном смысле употребляют тогда, когда хотят подчеркнуть, что неизвестно, каким будет конкретное значение этой величины, причем иногда за этими словами скрывается просто незнание, какова эта величина.

Однако математик употребляет эти же слова, вкладывая в них вполне определенное содержание. Действительно, говорит он, мы не знаем, какое значение примет эта величина в данном конкретном случае, но мы знаем, какие значения она может принимать, и знаем, каковы вероятности тех или иных значений. На основании этих данных мы не можем точно предсказать результат одного испытания, связанного с этой случайной величиной, но можем весьма надежно предсказать совокупность результатов большого числа испытаний. Чем больше испытаний (как говорят, чем больше статистика), тем точнее будут наши предсказания.

Итак, чтобы задать случайную величину, надо указать, какие значения она может принимать и каковы вероятности этих значений.

2.1. Дискретные случайные величины. Случайная величина ξ называется *дискретной*, если она может принимать дискретное множество значений x_1, x_2, \dots, x_n *).

*) В теории вероятностей рассматриваются также дискретные случайные величины, которые могут принимать бесконечное число значений.

же, пожалуй, стоит ответить на часто задаваемый вопрос: «Помогает ли метод Монте-Карло выигрывать в рулетку?» Нет, не помогает. И даже не занимается этим.

1.2. Пример. Для того чтобы читателю было более понятно, о чем пойдет речь, рассмотрим простой пример. Предположим, что нам нужно вычислить площадь плоской фигуры S . Это может быть произвольная фигура с криволинейной границей, заданная графически или аналитически, связанная или состоящая из нескольких кусков. Пусть это будет фигура, изображенная на рис. 1,

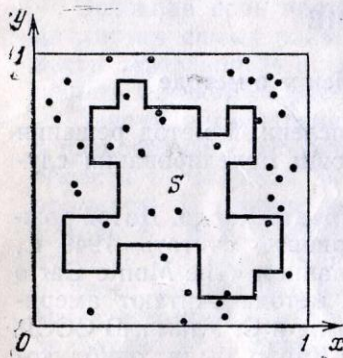


Рис. 1.

и предположим, что она вся расположена внутри единичного квадрата. Выберем внутри квадрата N случайных точек. Обозначим через N' число точек, попавших при этом внутрь S . Геометрически очевидно, что площадь S приближенно равна отношению N'/N . Чем больше N , тем больше точность этой оценки.

В примере, изображенном на рис. 1, выбраны 40 точек. Из них 12 точек оказались внутри S . Отношение N'/N равно $12/40 = 0,30$, в то время как истинная площадь S равна $0,35^*$.

1.3. Две особенности метода Монте-Карло. Первая особенность метода — простая структура вычислительного алгоритма. Как правило, составляется программа для осуществления одного случайного испытания (в п. 1.2 надо выбрать случайную точку в квадрате и проверить, принадлежит ли она S). Затем это испытание повторяется N раз, причем каждый опыт не зависит от всех остальных, и результаты всех опытов осредняются. Поэтому иногда метод Монте-Карло называют *методом статистических испытаний*.

*) На практике для вычисления площади плоской фигуры метод Монте-Карло не используют: для этого есть другие методы, хотя и более сложные, но зато обеспечивающие гораздо большую точность. Однако указанный в примере метод Монте-Карло позволяет столь же просто вычислять «многомерный объем» тела в многомерном пространстве. И в этом случае метод Монте-Карло часто оказывается единственным численным методом, дающим возможность решить задачу.

Вторая особенность метода — погрешность вычислений, как правило, пропорциональна $\sqrt{D/N}$, где D — некоторая постоянная, N — число испытаний. Отсюда видно, что для того, чтобы уменьшить погрешность в 10 раз (иначе говоря, чтобы получить в ответе еще один верный десятичный знак), нужно увеличить N (т. е. объем работы) в 100 раз.

Ясно, что добиться высокой точности таким путем невозможно. Поэтому обычно говорят, что метод Монте-Карло особенно эффективен при решении тех задач, в которых результат нужен с небольшой точностью (5–10%).

Однако одну и ту же задачу можно решать различными вариантами метода Монте-Карло*), которым отвечают различные значения D . Во многих задачах удастся значительно увеличить точность, выбрав способ расчета, которому соответствует значительно меньшее значение D .

1.4. Задачи, решаемые методом Монте-Карло. Во-первых, метод Монте-Карло позволяет моделировать любой процесс, на протекание которого влияют случайные факторы. Во-вторых, для многих математических задач, не связанных с какими-либо случайностями, можно искусственно придумать вероятностную модель (и даже не одну), позволяющую решать эти задачи. Собственно говоря, это и было сделано в п. 1.2. Таким образом, можно говорить о методе Монте-Карло как об универсальном методе решения математических задач.

Особенно интересно, что в некоторых случаях выгодно отказаться от моделирования истинного случайного процесса и вместо этого использовать искусственную модель. Такая ситуация будет рассмотрена в §§ 7, 8.

1.5. Еще о примере. Вернемся к примеру п. 1.2. Для расчета нам нужно было выбирать случайные точки в единичном квадрате. Как это сделать физически?

Представим такой эксперимент. Рис. 1 (в увеличенном масштабе) с фигурой S и квадратом повешен на стену в качестве мишени. Стрелок, находящийся на некотором расстоянии от стены, стреляет N раз, целясь в центр квадрата. Конечно, все пули не будут ложиться

*) В иностранной литературе теперь чаще пишут о методах Монте-Карло (во множественном числе), имея в виду, что одну и ту же задачу можно считать при помощи моделирования различных случайных величин.

менее соответствует истинному смыслу этого понятия. Но интуитивное представление о случайной величине, как правило, весьма далеко от математического определения. Поэтому в § 2 понятие вероятности предполагается известным и разъясняется только более сложное понятие случайной величины. Этот параграф не может заменить курс теории вероятностей: изложение здесь упрощенное и без доказательств. Но он дает некоторое представление о случайных величинах, достаточное для понимания простейших приемов метода Монте-Карло.

Основная цель настоящей книжки — подсказать специалистам самых различных направлений, что в их области деятельности встречаются задачи, которые можно решать методом Монте-Карло.

Задачи, рассмотренные в лекциях, достаточно просты и разнообразны. Но они, конечно, не могли охватить все области применения метода. Ограничусь только одним примером. В книжке ни слова нет о медицине. Однако методы § 7 позволяют рассчитывать дозы облучения при лучевой терапии. Имея программу для расчета поглощенного излучения в различных тканях тела, можно наиболее эффективным образом выбирать дозировку и направление облучения, следя за тем, чтобы не нанести вреда здоровым тканям.

В настоящую книжку включено все то, что читалось в лекциях, несколько подробнее изложены примеры и добавлен § 9.

Москва, 1967 г.

И. Соболев

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Общее представление о методе

Метод Монте-Карло — это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

1.1. Происхождение метода Монте-Карло. Датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1949 г., когда появилась статья под названием «The Monte Carlo method»^{*)}. Создателями этого метода считают американских математиков Дж. Неймана и С. Улама. В СССР первые статьи о методе Монте-Карло были опубликованы в 1955—1956 гг.^{**)}

Любопытно, что теоретическая основа метода была известна давно. Более того, некоторые задачи статистики рассчитывались иногда с помощью случайных выборок, т. е. фактически методом Монте-Карло. Однако до появления электронных вычислительных машин (ЭВМ) этот метод не мог найти сколько-нибудь широкого применения, ибо моделировать случайные величины вручную — очень трудоемкая работа. Таким образом, возникновение метода Монте-Карло как весьма универсального численного метода стало возможным только благодаря появлению ЭВМ.

Само название «Монте-Карло» происходит от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своим игорным домом. Дело в том, что одним из простейших механических приборов для получения случайных величин является... рулетка. Об этом речь пойдет в § 3. Здесь

^{*)} Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo method. — J. Amer. statistical assoc., 1949, 44, № 247, p. 335—341.

^{**)} Это были статьи В. В. Чавчанидзе, Ю. А. Шрейдера, В. С. Владимирова.

22.19
С 54
УДК 519.6

Соболь И. М.
С 54 **Метод Монте-Карло.** — 4-е изд. — М.: Наука,
Главная редакция физико-математической литера-
туры, 1985. — 80 с. — (Популярные лекции по мате-
матике). — 10 к.

В книге изложены основные приемы метода Монте-Карло (метода статистических испытаний). Приведены примеры разнообразных задач, решаемых этим методом.

Предназначена для инженеров, конструкторов, исследователей и других специалистов, работающих в различных отраслях народного хозяйства (в науке, технике, промышленности, медицине, экономике, сельском хозяйстве, торговле и др.), а также для всех, кто желает впервые познакомиться с методом Монте-Карло.

С 1702070000—030 47-85
053(02)-85

ББК 22.19
518

Рецензент:
доктор физико-математических наук Г. А. Михайлов

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1985

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

В четвертом издании без изменений остались только §§ 1, 5, 6. Однако по-прежнему главы 1, 2 доступны читателям, не изучавшим теории вероятностей. Лишь новая глава 3 предполагает знакомство с основами этой теории.

Новые §§ 10—12 посвящены современным способам получения псевдослучайных чисел, различным методам моделирования случайных величин и понятию трудоемкости алгоритмов Монте-Карло. В новом § 8 приведено решение одной астрофизической задачи, решенной методом Монте-Карло.

Москва, 1984

И. Соболь

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Несколько лет назад мне было предложено прочесть две лекции о методе Монте-Карло для слушателей факультета вычислительной техники Общественного университета. Я согласился. И перед первой лекцией с ужасом узнал, что большая часть слушателей не знакома с теорией вероятностей. Отступать было поздно. Пришлось на ходу включить в лекцию дополнительный раздел, знакомящий слушателей с основными теоретико-вероятностными понятиями.

Лекции эти повторялись в течение нескольких лет. Постепенно содержание их «устоялось». В настоящем издании сохранен также дополнительный раздел § 2, о котором хочется сказать несколько слов.

Каждому человеку приходилось употреблять слова «вероятность» и «случайная величина». Интуитивное представление о вероятности (как о частоте) более или

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 46

И. М. СОБОЛЬ

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ДОПОЛНЕННОЕ И ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Многоуважаемому
Карабу Шакефову
от автора.*

И. Соболев

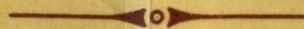
Анда-Ара, 1987



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

10 к.

Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ



И. М. СОВОЛЬ

МЕТОД
МОНТЕ-КАРЛО



✓ Дискретная случайная величина ξ определяется таблицей

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad (T)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — возможные значения величины ξ , а p_1, p_2, \dots, p_n — соответствующие им вероятности. Точнее говоря, вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_i (обозначим ее через $P\{\xi = x_i\}$), равна p_i :

$$P\{\xi = x_i\} = p_i.$$

Таблица (T) называется *распределением случайной величины*.

Числа x_1, x_2, \dots, x_n могут быть, вообще говоря, любыми. Однако вероятности p_1, p_2, \dots, p_n должны удовлетворять двум условиям:

1) все p_i положительны:

$$p_i > 0; \quad (1)$$

2) сумма всех p_i равна 1:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (2)$$

(это условие означает, что ξ обязана в каждом случае принять одно из значений x_1, x_2, \dots, x_n).

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (3)$$

Чтобы выяснить физический смысл этой величины, запишем ее в следующем виде:

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^{-1}.$$

Отсюда видно, что $M\xi$ — это *среднее значение* величины ξ , причем более вероятные значения x_i входят в сумму с большими весами*).

*) Осреднение с весами очень часто встречается в самых различных областях науки. Например, в механике: если в точках x_1, x_2, \dots, x_n (на оси Ox) расположены массы m_1, m_2, \dots, m_n , то абсцисса центра тяжести этой системы вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i m_i \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^{-1}.$$

Конечно, в этом случае сумма всех масс не обязана равняться единице.

✓ Отметим основные свойства математического ожидания. Если c — какая-нибудь не случайная величина, то

$$M(\xi + c) = M\xi + c, \quad (4)$$

$$Mc\xi = cM\xi. \quad (5)$$

Если ξ, η — любые случайные величины, то

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta. \quad (6)$$

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (7)$$

Следовательно, дисперсия $D\xi$ — это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины ξ от ее среднего значения $M\xi$. Очевидно, всегда $D\xi > 0$.

Математическое ожидание и дисперсия — важнейшие числовые характеристики случайной величины ξ . Каково их практическое значение?

Если мы будем наблюдать величину ξ много раз и получим значения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ (каждое из которых будет равно одному из чисел x_1, x_2, \dots, x_n), то среднее арифметическое от этих значений будет близко к $M\xi$:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N}{N} \approx M\xi. \quad (8)$$

Дисперсия $D\xi$ характеризует разброс этих значений около среднего $M\xi$.

Формулу (7) для дисперсии можно преобразовать с помощью формул (4) — (6):

$$D\xi = M[\xi^2 - 2M\xi \cdot \xi + (M\xi)^2] = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2,$$

откуда

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \quad (9)$$

Вычислять дисперсию по этой формуле обычно проще, чем по формуле (7).

Отметим основные свойства дисперсии. Если c — какая-нибудь не случайная величина, то

$$D(\xi + c) = D\xi, \quad (10)$$

$$Dc\xi = c^2 D\xi. \quad (11)$$

Важную роль в теории вероятностей играет понятие независимости случайных величин. В действительности